
# CURSO DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN DE CERTIFICACIÓN DE ACTUARIOS EN PASIVOS LABORALES

12 de mayo de 2022

## Repaso de Probabilidad

SM consultores

Curso especialmente diseñado para Willis Towers Watson

**Esta sección del programa tiene como objetivos:**

1. **Dar un breve repaso a definiciones de Probabilidad.**
2. **Definir a la función de supervivencia y a la función de distribución.**

SM consultores

3. **Conocer la notación actuarial para probabilidades de supervivencia y muerte, así como sus propiedades.**
4. **Revisar el concepto de Valor Presente Actuarial.**
5. **Repasar anualidades ciertas y su versión contingente.**

SM consultores

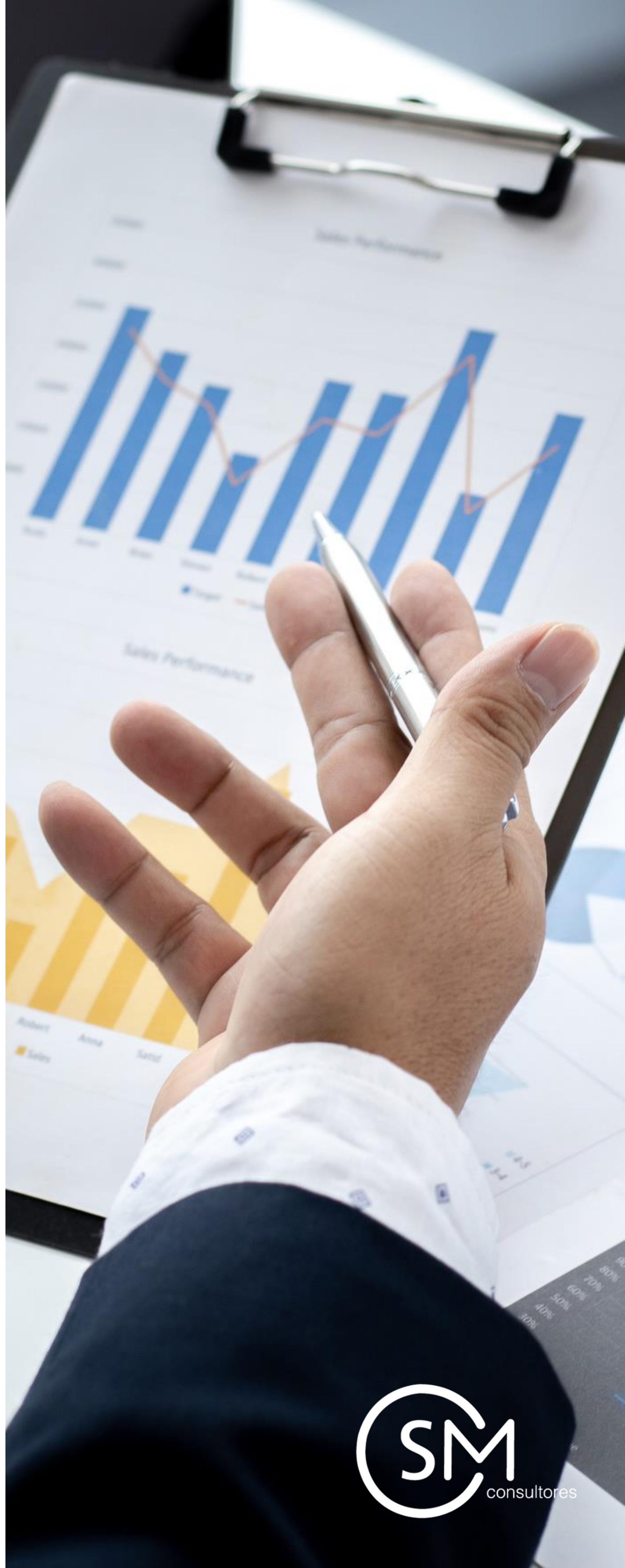
# Breve repaso de Probabilidad

## VARIABLE ALEATORIA (v. a.)

- Es una función que asocia resultados de un *experimento aleatorio* con números reales.

- Se denota con letras mayúsculas: $X, Z, T_0, T_x$, etcétera.

- A los posibles valores que toman las variables aleatorias se les denotarán con letras minúsculas: $x, z, t$, etcétera.



# Breve repaso de Probabilidad

## CÁLCULO DE PROBABILIDADES

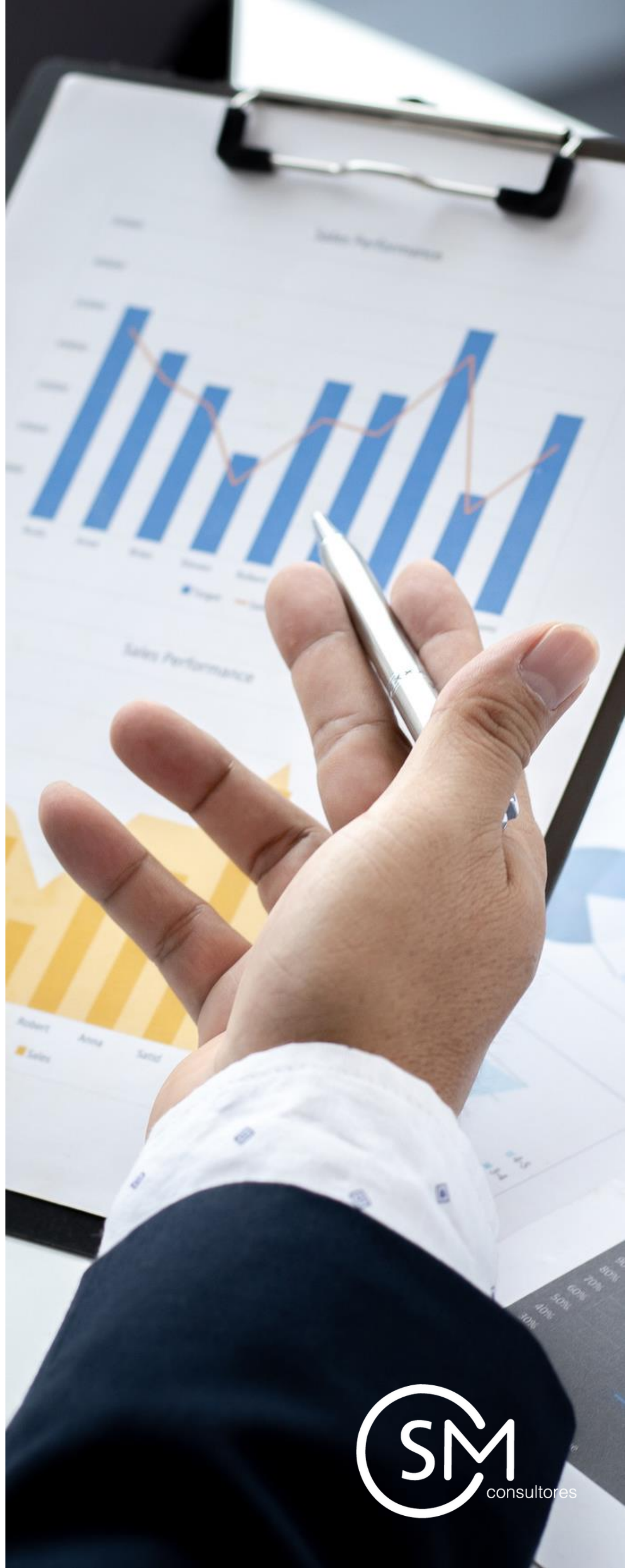
- **Función de distribución, $\boldsymbol{F(x)}$**

Calcula la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor **menor o igual** a $x$.

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Por ejemplo, la probabilidad de que una persona fallezca en los siguientes 15 años se expresará como

$$F(15) = \mathbb{P}(X \leq 15).$$



# Breve repaso de Probabilidad

## CÁLCULO DE PROBABILIDADES

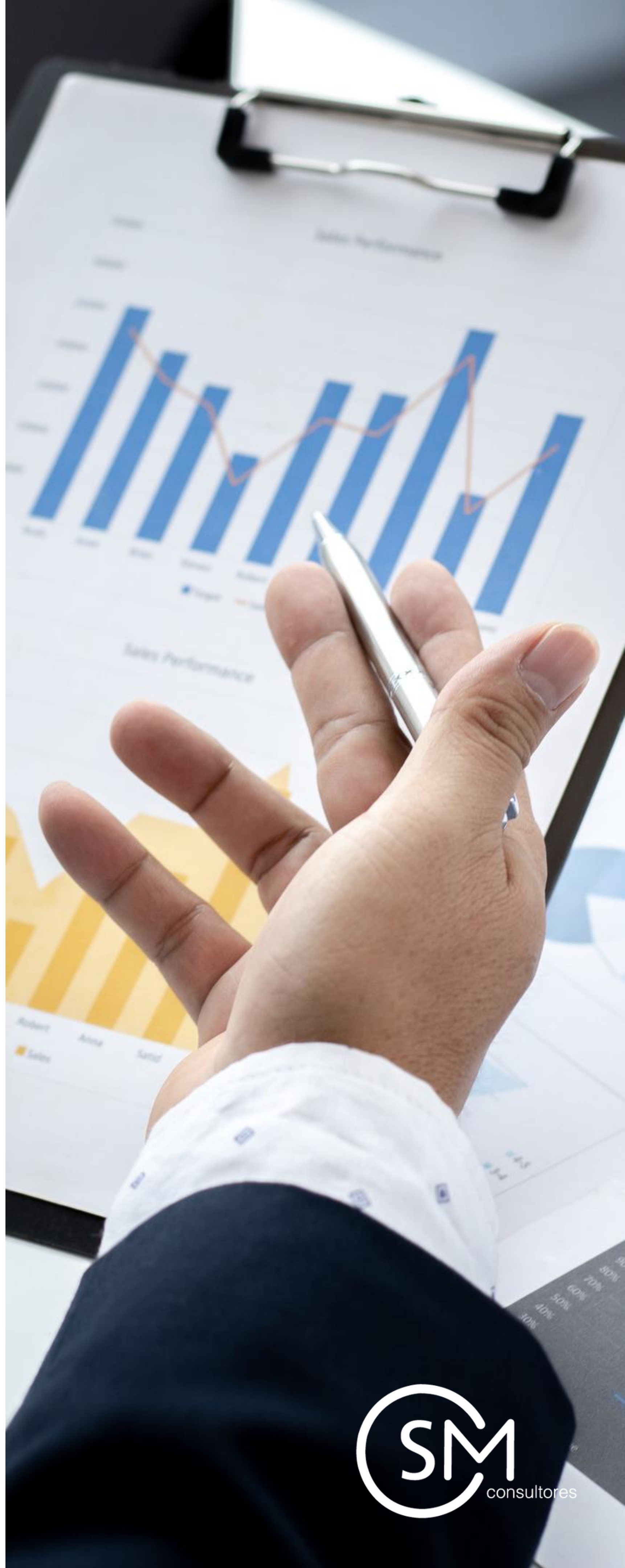
- **Función de supervivencia, $S(x)$**

Calcula la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor **mayor** a $x$.

$$S(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

Por ejemplo, la probabilidad de que una persona fallezca sobreviva 22.5 años se expresará como

$$S(22.5) = \mathbb{P}(X > 22.5).$$



# Breve repaso de Probabilidad

## RELACIONES Y PROPIEDADES IMPORTANTES

Existen ciertas propiedades y relaciones que deberán satisfacer la función de distribución y la función de supervivencia

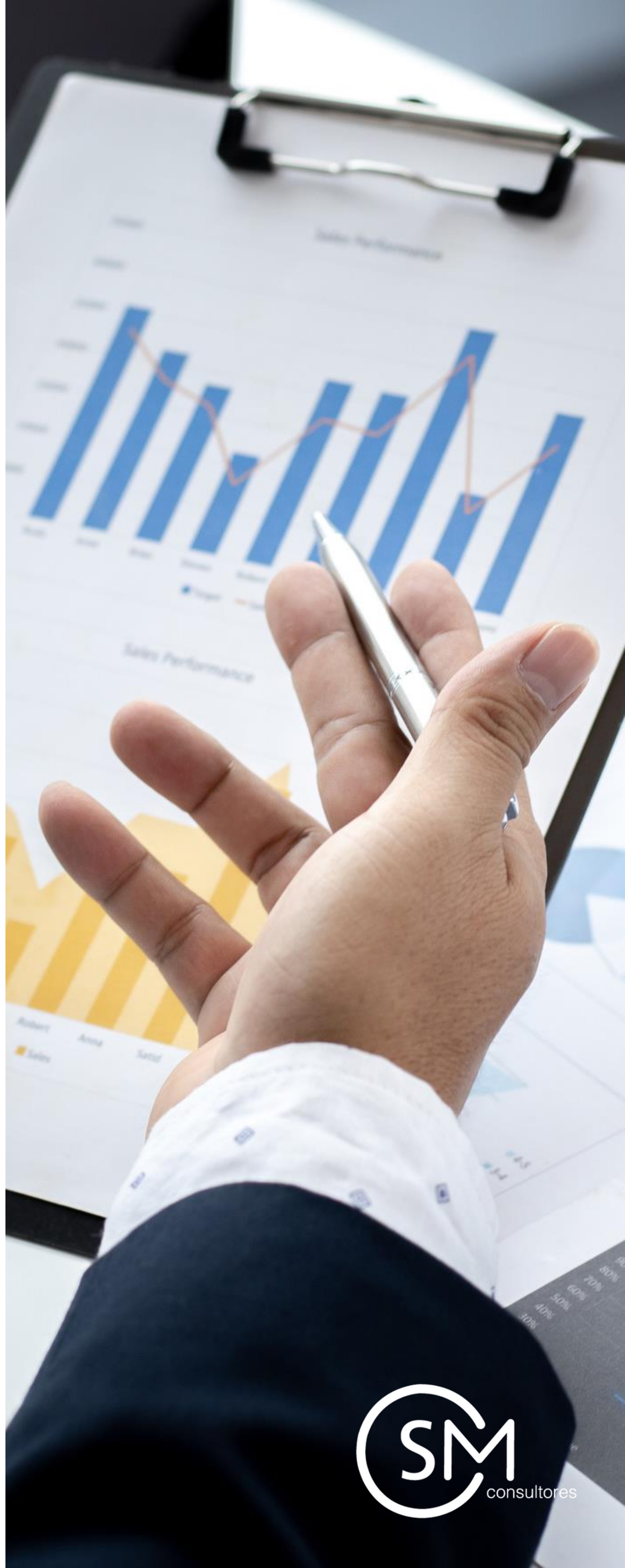
*i.* $S(0) = 1$

*ii.* $S(\infty) = 0$

*iii.* $S(x)$ es una función no creciente.

*iv.* $S(x) = 1 - F(x)$

*v.* $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = S(a) - S(b)$



# Breve repaso de Probabilidad

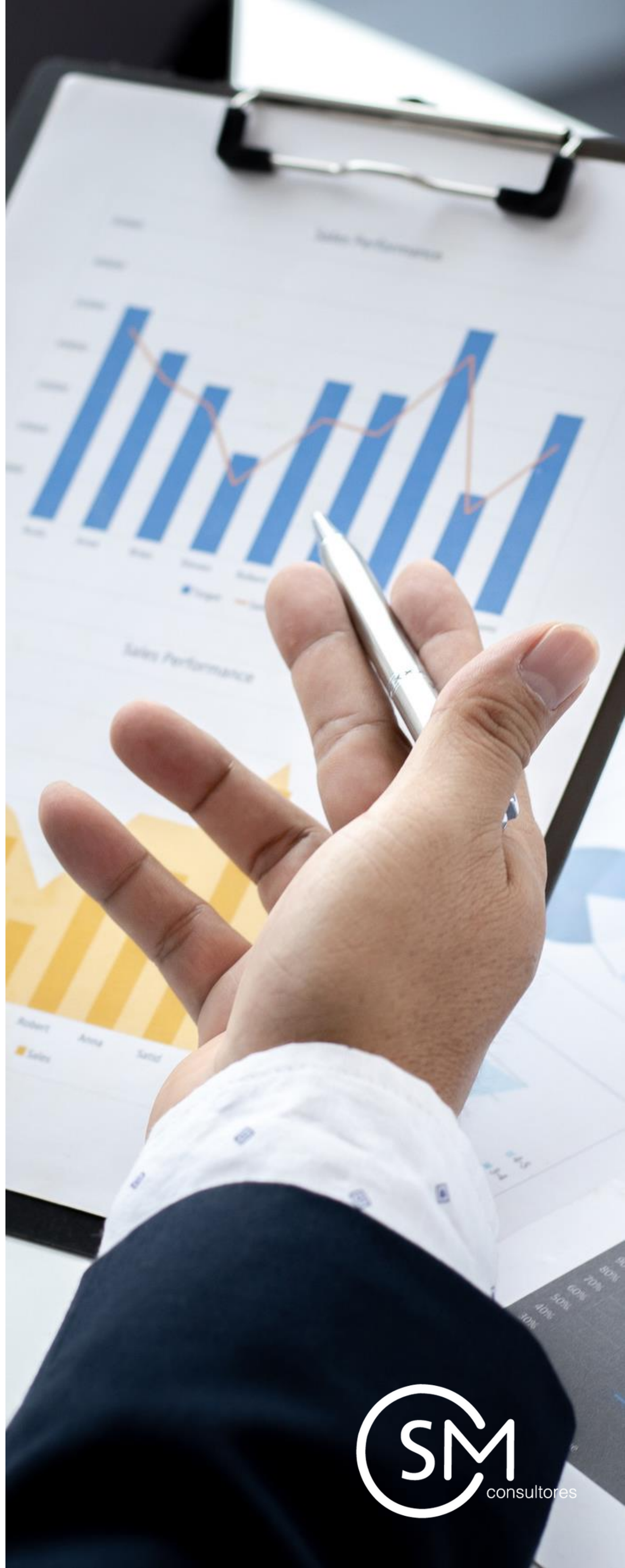
## PROBABILIDAD CONDICIONAL

Para dos eventos $A$ y $B$, se define a la probabilidad del evento $A$ dada la ocurrencia del evento $B$ como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

En particular, se cumplirá que, para $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X > x + t | X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > x + t)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{S(x + t)}{S(x)}$$



# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 01

Consideremos a una v. a. $X$ que denota el tiempo de vida en años de un recién nacido.

Asumimos que la función de supervivencia de $X$ es:

$$S(x) = \sqrt{\frac{100 - x}{100}}$$

para $0 < x < 100$.

a) Graficar $S(x)$.

b) Calcular $F(x)$.

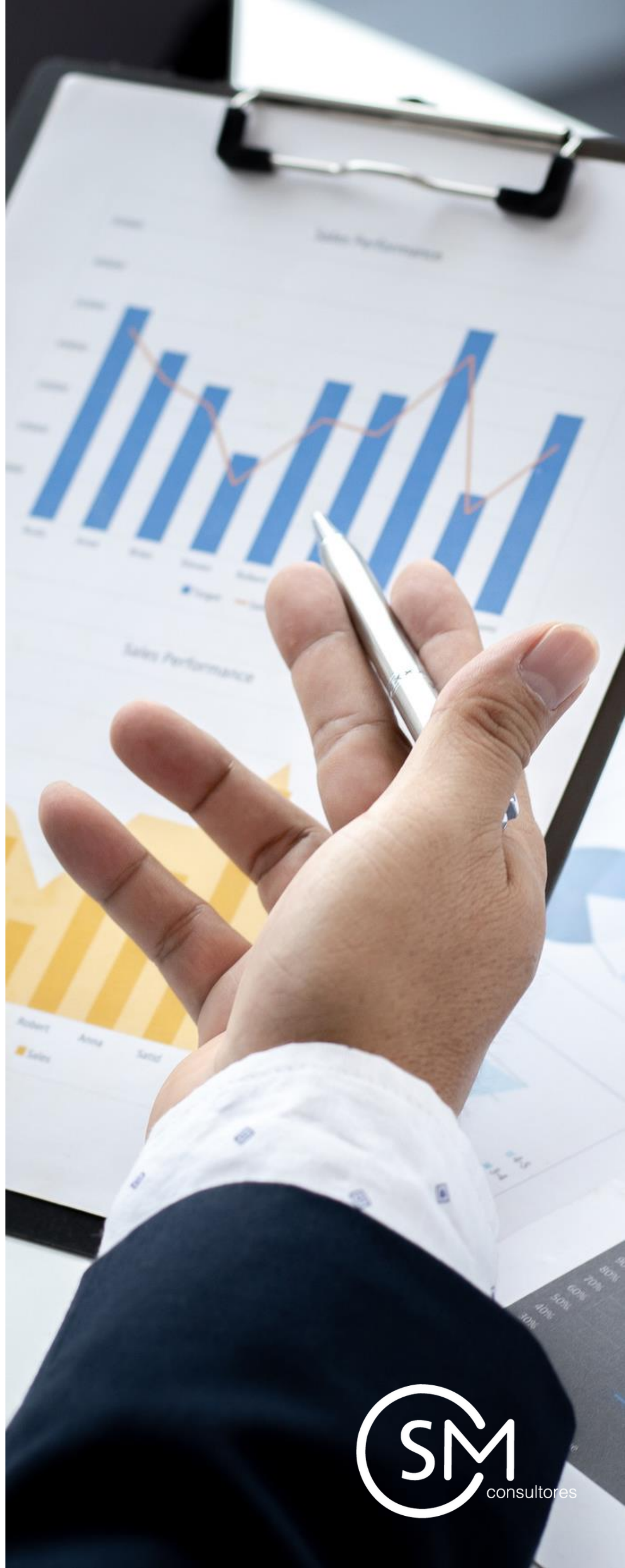
c) Determinar la probabilidad de que un recién nacido:

  i. Sobreviva 65 años;

  ii. Sobreviva 65 años pero no sobreviva 80 años;

  iii. No sobreviva 80 años.

d) Calcular la probabilidad de que una persona que alcanzó los 20 años de edad sobreviva a edad 45 pero no a edad 70.



# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 02

Consideremos a una v. a. $T$ que representa el tiempo de vida en años de un recién nacido.

Asumimos que la función de supervivencia de $T$ es

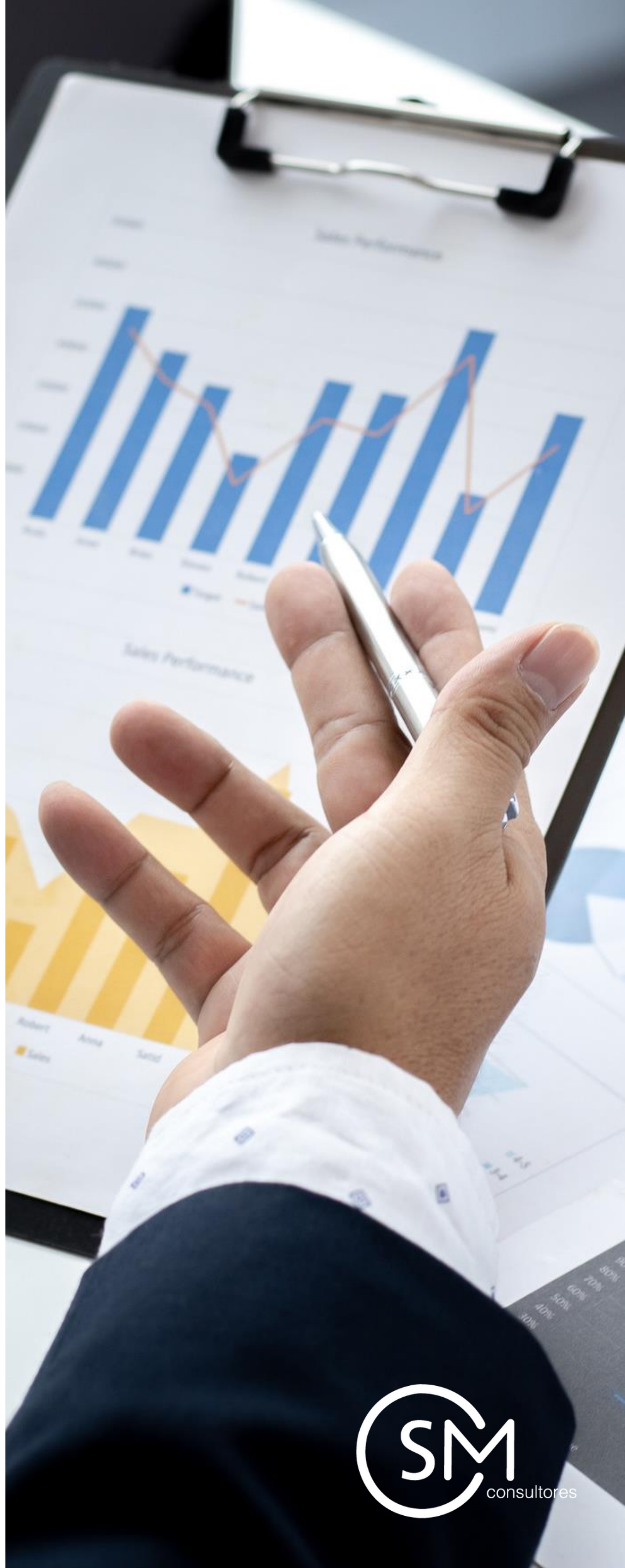
$$S(t) = (t^2 - 190t + 9000)/9000$$

para $t \leq 90$.

a) Graficar $S(t)$ y calcular $S(60)$.

b) Determinar la probabilidad de que una persona que llegó con vida a los 40 años sobreviva $t$ años más. Graficar esta probabilidad en términos de $t$ y concluir.

c) Utilizando lo obtenido en (b) calcular la probabilidad de que una persona de 40 años sobreviva a edad 60.




# CURSO DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN DE CERTIFICACIÓN DE ACTUARIOS EN PASIVOS LABORALES

12 de mayo de 2022

## Notación actuarial

SM consultores

Curso especialmente diseñado para Willis Towers Watson

**Los conceptos de Probabilidades vistos en la primera parte tienen una notación actuarial específica (*International Actuarial Notation)* adoptada en 1898 por el *International Actuarial Congress.***

**Esta notación se actualiza, revisa y se extiende de ser necesario por el *International Actuarial Association´s Permanent Commitee on Notation.***

SM consultores

# Notación Actuarial

## TIEMPO DE VIDA DE UN RECIÉN NACIDO, $T_0$

- Es la variable aleatoria que denota el tiempo de vida en años de una persona de edad 0 (recién nacido).
- Se denota como $T_0$.
- Se asume como variable aleatoria continua.
- Dependiendo el modelo esta variable aleatoria toma valores en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(0, \omega)$ donde $\omega$ (omega) representa la edad máxima que se espera que alcance una persona.

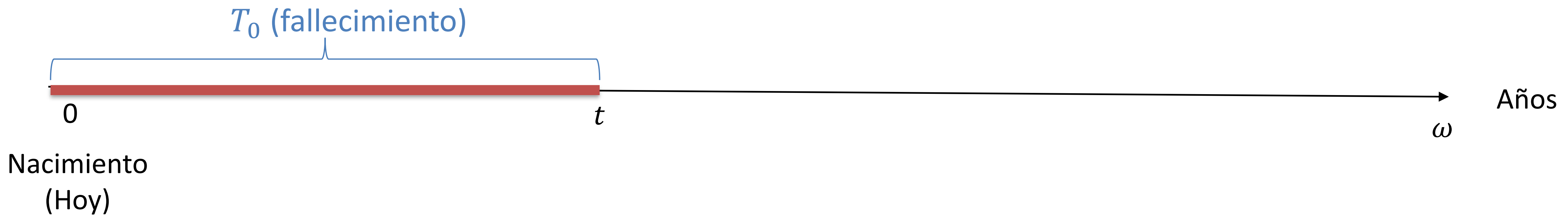
# Notación Actuarial

## TIEMPO DE VIDA DE UN RECIÉN NACIDO, $T_0$

- La función de distribución asociada a $T_0$ es:

$$F_0(t) = \mathbb{P}[T_0 \leq t]$$

- Y se interpreta como la probabilidad de que un recién nacido muera en los primeros $t$ años de vida.



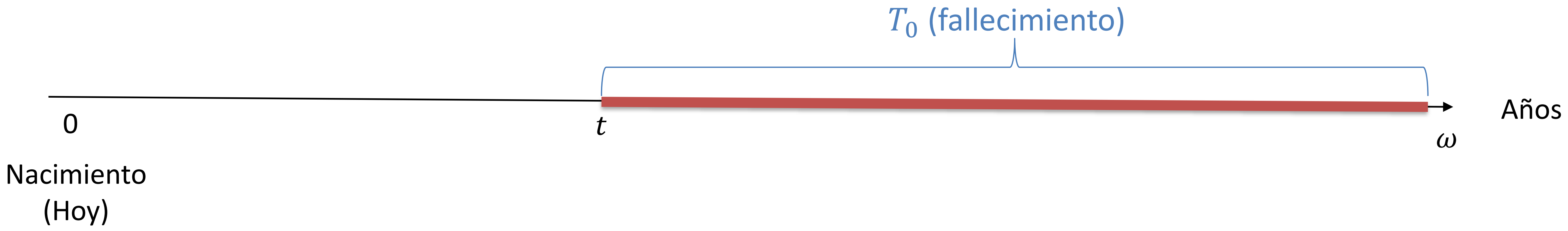

# Notación Actuarial

## TIEMPO DE VIDA DE UN RECIÉN NACIDO, $T_0$

- La función de supervivencia asociada a $T_0$ es:

$$S_0(t) = \mathbb{P}[T_0 > t]$$

- Y se interpreta como la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a edad $t$.




# Notación Actuarial

## TIEMPO RESTANTE DE UNA PERSONA DE EDAD $x$, $T_x$

- Consideremos ahora a una persona de edad $x$, denotada como $(x)$.
- La v. a. $T_x$ representa el tiempo de vida remanente de $(x)$.
- Por ejemplo, $T_{60}$ representa el tiempo de vida restante de una persona de edad 60. Si $T_{60} = 22.6$, entonces la persona habrá muerto a los 82.6 años.
- Se asume que $T_x$ es una v. a. continua con valores en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(0, \omega - x)$.

# Notación Actuarial

## FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$. NOTACIÓN ACTUARIAL.

- Para el cálculo de probabilidades sobre $T_x$ debemos considerar que **la persona está viva a tiempo $x$**.

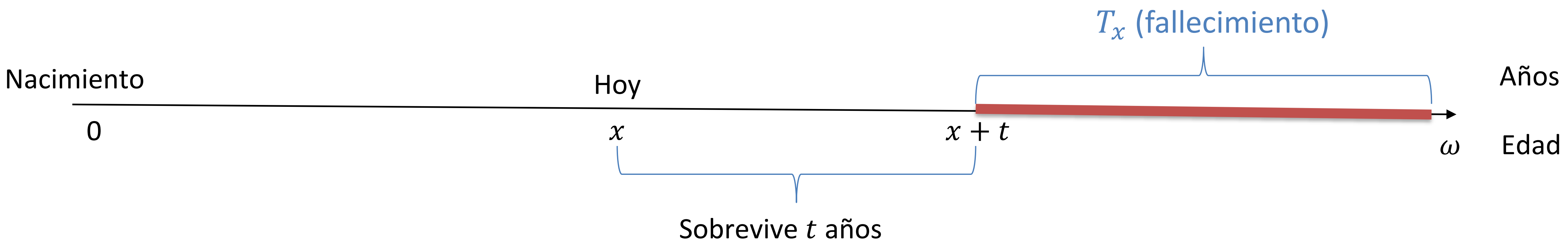
- Luego, las probabilidades de $T_x$ deberán estar condicionadas al evento $T_0 \geq x$.

# Notación Actuarial

## FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$. NOTACIÓN ACTUARIAL.

- La función de supervivencia de $T_x$, para $t > 0$, se define como:

$$S_x(t) = \mathbb{P}[T_x > t]$$




# Notación Actuarial

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$.
NOTACIÓN ACTUARIAL.

- La función de supervivencia de $T_x$ se calcula a partir de $T_0$ como:

$$S_x(t) = \mathbb{P}[T_0 > x + t | T_0 > x] = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}$$

- La **notación actuarial** será:

$$S_x(t) = \ {}_t p_x$$

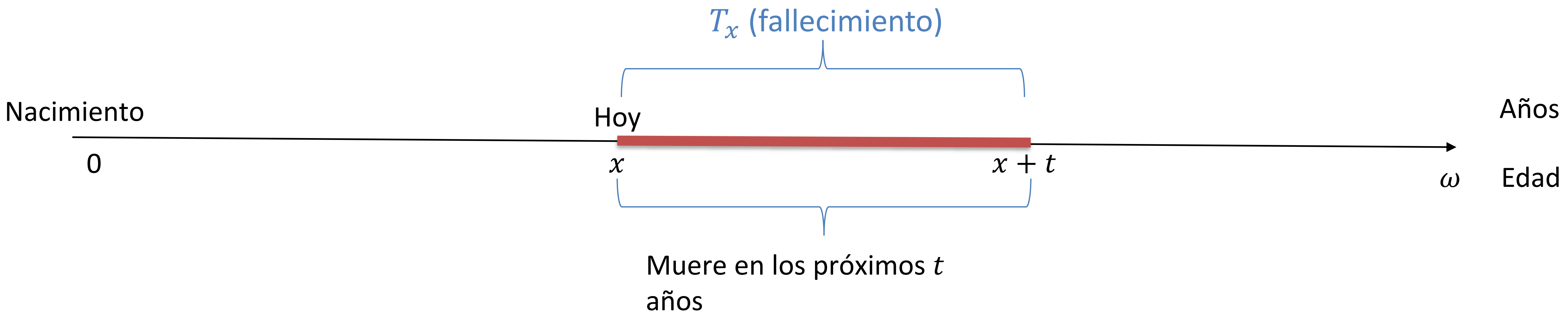
*Nota*: si $t$ es igual a 1, se omite el subíndice izquierdo ${}_t p_x = p_x$.

# Notación Actuarial

## FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$. NOTACIÓN ACTUARIAL.

- La función de distribución de $T_x$ se define como:

$$F_x(t) = \mathbb{P}[T_x \leq t]$$




# Notación Actuarial

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$.

NOTACIÓN ACTUARIAL.

- Vemos que:

$$F_x(t) = 1 - S_x(t) = \frac{S_0(x) - S_0(x+t)}{S_0(x)}$$

- La **notación actuarial** será:

$$F_x(t) = \ {}_tq_x$$

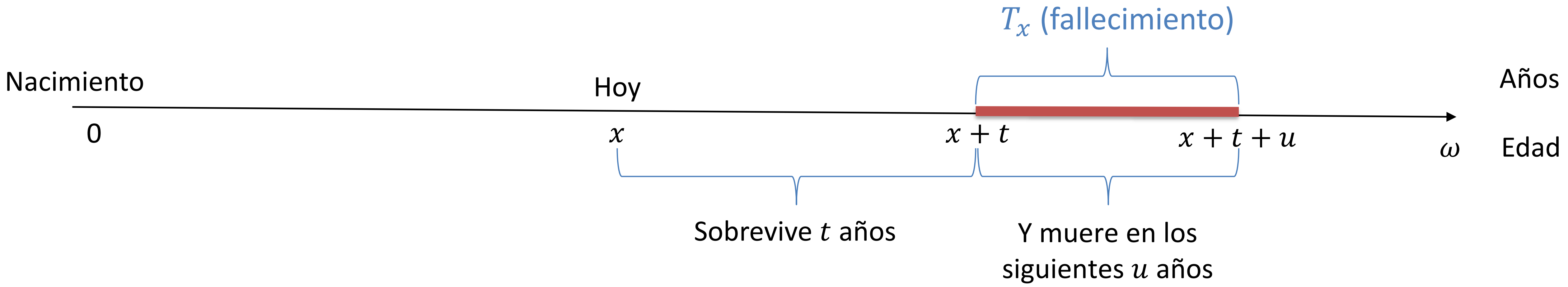
*Nota*: si $t$ es igual a 1, se omite el subíndice izquierdo ${}_tq_x = q_x$.

# Notación Actuarial

## FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$. NOTACIÓN ACTUARIAL.

- Finalmente podemos calcular la probabilidad de que $T_x$ ocurra entre $t$ y $t+u$

$$ {}_{t|u}q_x = \mathbb{P}[t < T_x \leq t+u] $$




# Notación Actuarial

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y DE SUPERVIVENCIA DE $T_x$.

NOTACIÓN ACTUARIAL.

- Algunas relaciones básicas son:

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \mathbb{P}[t < T_x \leq t+u] \\
&= \mathbb{P}[T_x \leq t+u] - \mathbb{P}[T_x \leq t] \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x
\end{aligned}
$$

- Y, análogamente

$$
{}_{t|u}q_x = {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x
$$

# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 03

La variable aleatoria que describe el tiempo de vida en años de un recién nacido, $T_0$, sigue una función de supervivencia dada por:

$$S_0(t) = (1 - t/120)^{1/6}$$

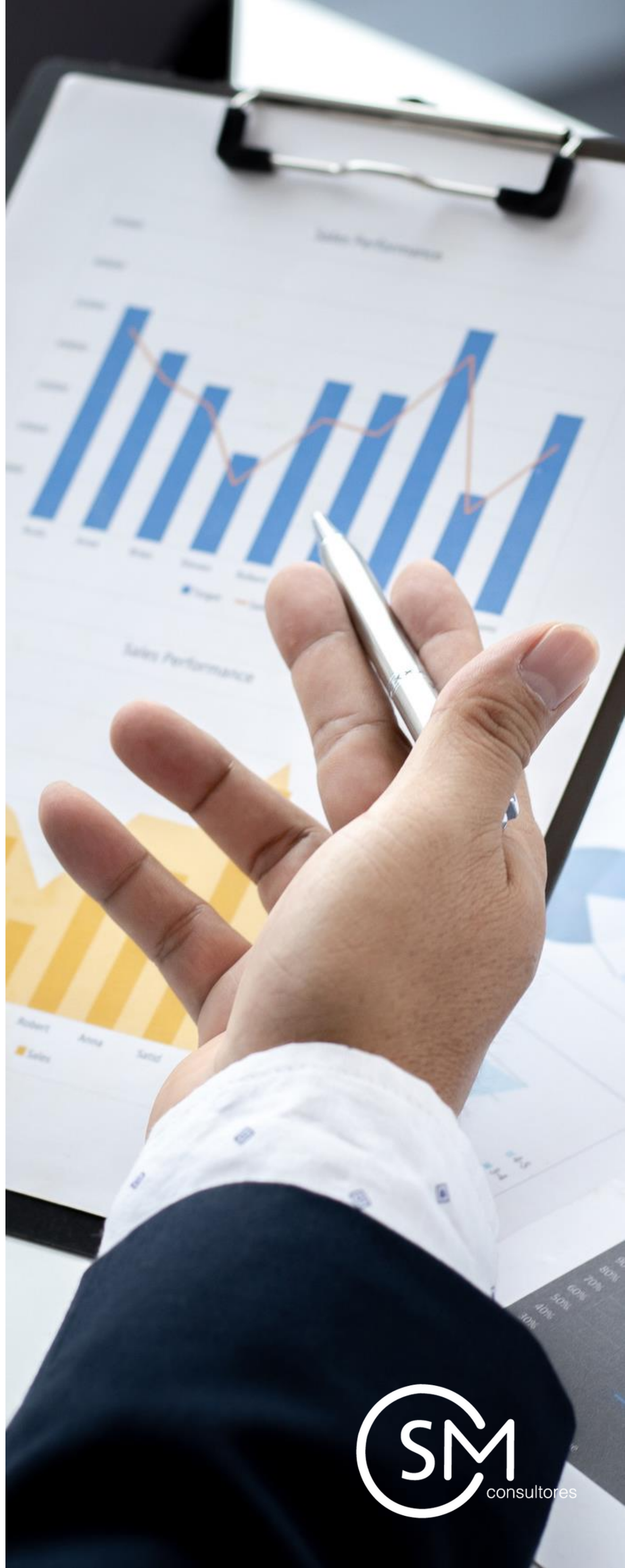
para $0 \leq t \leq 120$.

a) Determinar $S_x(t)$ y calcular la probabilidad de que una persona de 60 años sobreviva 10 años más.

b) Calcular la probabilidad de que una persona de 65 años muera durante el siguiente año.

c) La probabilidad de que una persona de 40 años sobreviva 25 años más pero no más de 30 años.

Expresar todas estas probabilidades con notación actuarial.



# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 04

A. Interpretar la siguiente notación actuarial:

1) ${}_{18}p_{20}$

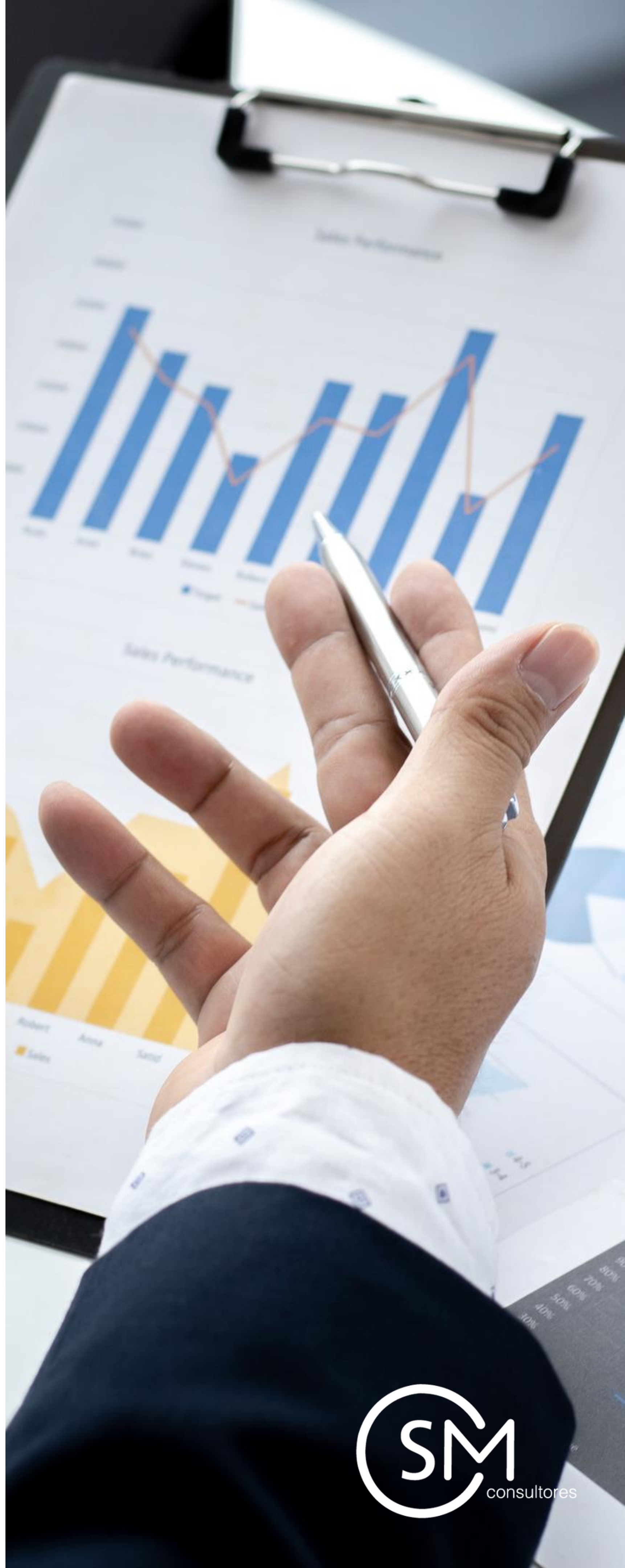
2) $q_{45}$

3) ${}_{10|5}q_{38}$

B. Demostrar las siguientes identidades y dar su interpretación:

1) ${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t}$

2) ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$



# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 05

Considere que $p_x = 0.99$, $p_{x+1} = 0.985$, ${}_3p_{x+1} = 0.95$ y $q_{x+3} = 0.02$.

Calcular:

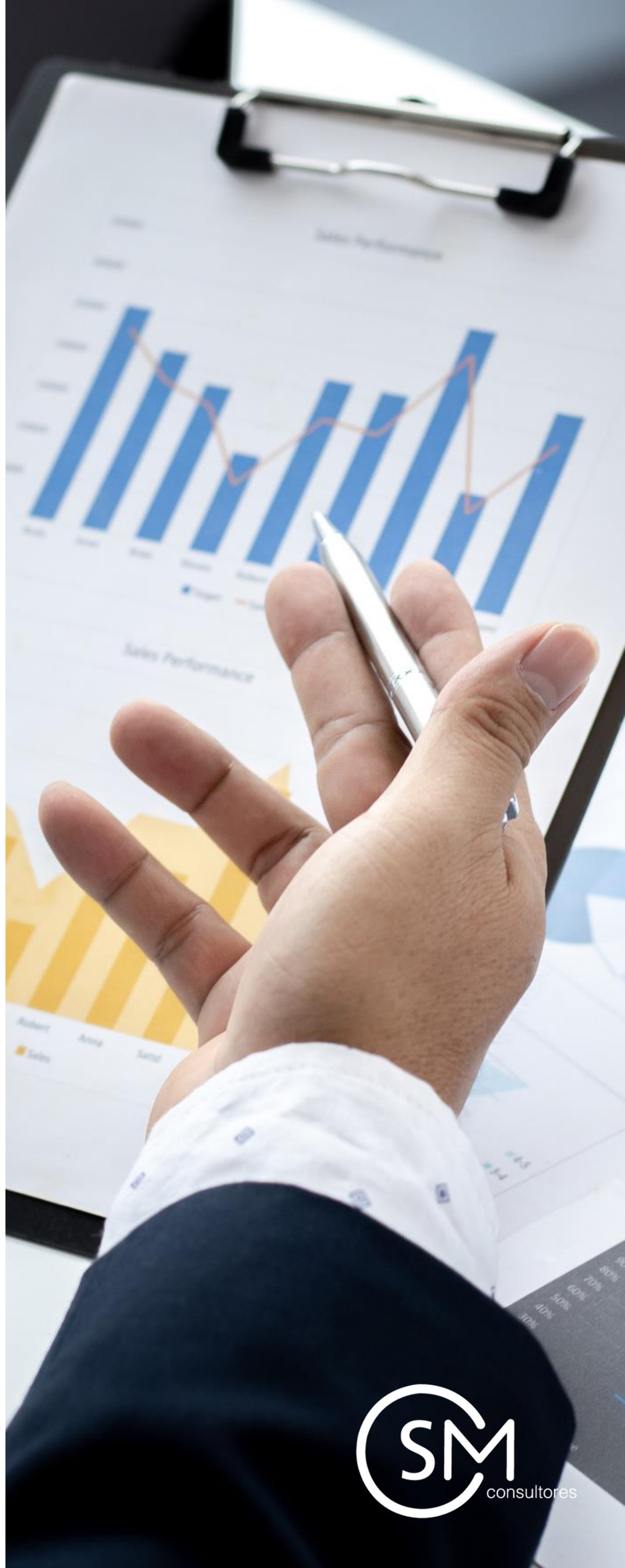
*a)* $p_{x+3}$

*b)* ${}_2p_x$

*c)* ${}_2p_{x+1}$

*d)* ${}_3p_x$

*e)* ${}_{1|2}q_x$




# CURSO DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN DE CERTIFICACIÓN DE ACTUARIOS EN PASIVOS LABORALES

12 de mayo de 2022

## Tablas de mortalidad y anualidades

SM consultores

Curso especialmente diseñado para Willis Towers Watson

A continuación, se estudia la relación que existe entre la función de supervivencia y una tabla de mortalidad.

Esto nos permitirá calcular valores presentes actuariales y anualidades contingentes.

SM consultores

# Notación Actuarial

## TABLAS DE MORTALIDAD

- Una tabla de mortalidad nos da una vista concreta de la variable aleatoria de supervivencia.
- Muestra un grupo de personas e inicia a edad $x_0$. Generalmente $x_0 = 0$.
- El número de personas vivas a edad $x_0$ se le conoce como radix.
- Para una edad $x > x_0$, definimos
  - Al número de sobrevivientes esperados a edad $x$ como $l_x$.
  - Al número de muertes esperadas a edad $x$ como $d_x$.

# Notación Actuarial

## TABLAS DE MORTALIDAD

- Un ejemplo de una tabla de mortalidad podría ser:

| Edad | $l_x$ | $d_x$ |
|---|---|---|
| 70 | 100 | 10 |
| 71 | 90 | 15 |
| 72 | 75 | 15 |
| 73 | 60 | 20 |
| 74 | 40 | 18 |

- Se puede observar que

$$l_x - l_{x+1} = d_x$$

y

$$l_x - l_{x+n} = \sum_{j=0}^{n-1} d_{x+j} = {}_n d_x$$

# Notación Actuarial

## TABLAS DE MORTALIDAD

- La relación entre $l_x$ y $S_0(x)$ está dará por:

$$l_x = l_0 \cdot \mathbb{P}[T_0 > x] = l_0 \cdot S_0(x)$$

| Número esperado de personas con vida a edad $x$ | $=$ | Número inicial de personas (radix) | $\times$ | Probabilidad de sobrevivir a edad $x$ |
|---|---|---|---|---|

# Notación Actuarial

## TABLAS DE MORTALIDAD

- Además, se cumple

$$ {}_tp_x = \mathbb{P}[T_x > t] = \mathbb{P}[T_0 > x + t | T_0 > x] $$

$$ = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = \frac{l_{x+t}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

- Y en consecuencia,

$$ {}_tq_x = 1 - \ {}_tp_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_td_x}{l_x} $$

# Notación Actuarial

## TABLAS DE MORTALIDAD

- Finalmente,

$$_{t|u}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x} = \frac{_u d_{x+t}}{l_x}$$

SM consultores

# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 06

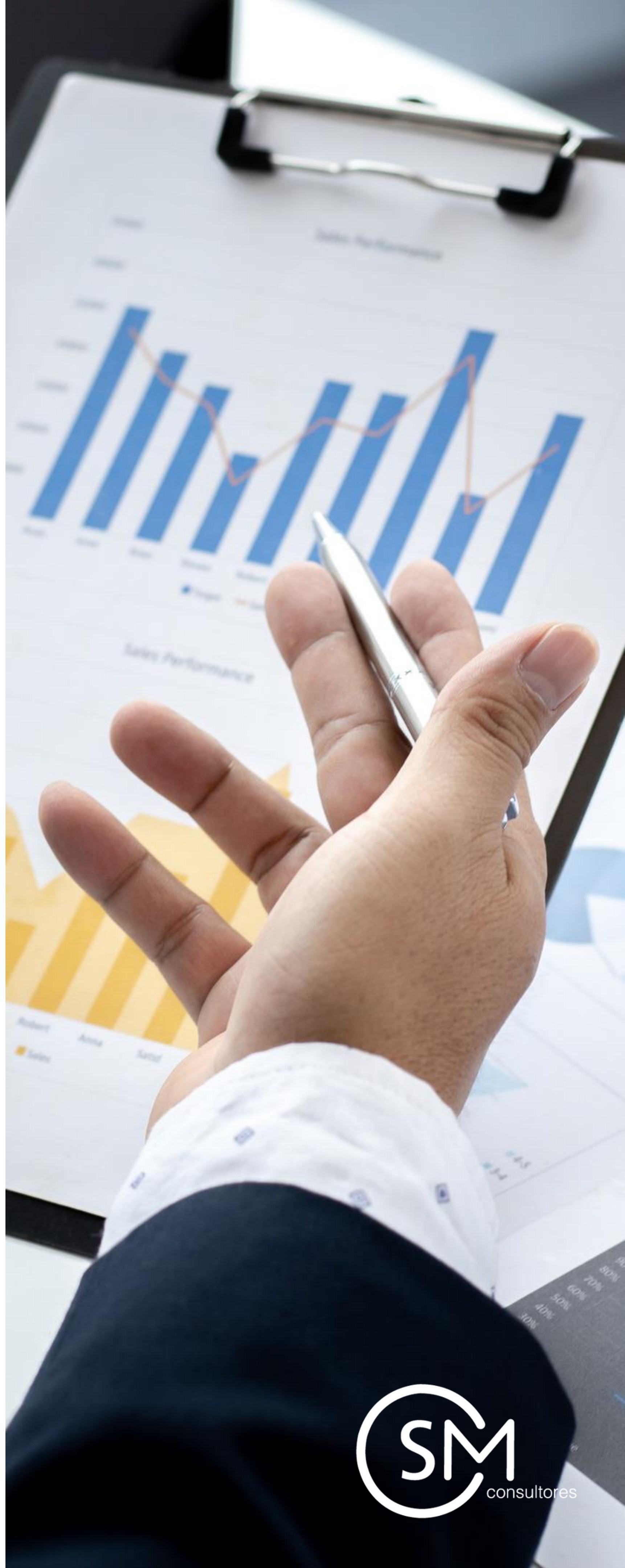
Considere la siguiente función de supervivencia que modela el tiempo de vida de un recién nacido:

$$S_0(t) = \left(\frac{70}{70+t}\right)^2$$

para $t \geq 0$. Supongamos un radix de 100,000.

1. Calcular ${}_{5|}q_{40}$.
2. Determinar $l_{60}$ y $d_{65}$

*Nota*: Cuando $u$ es igual a 1, se omite tal subíndice ${}_{t|1}q_x = {}_{t|}q_x$.



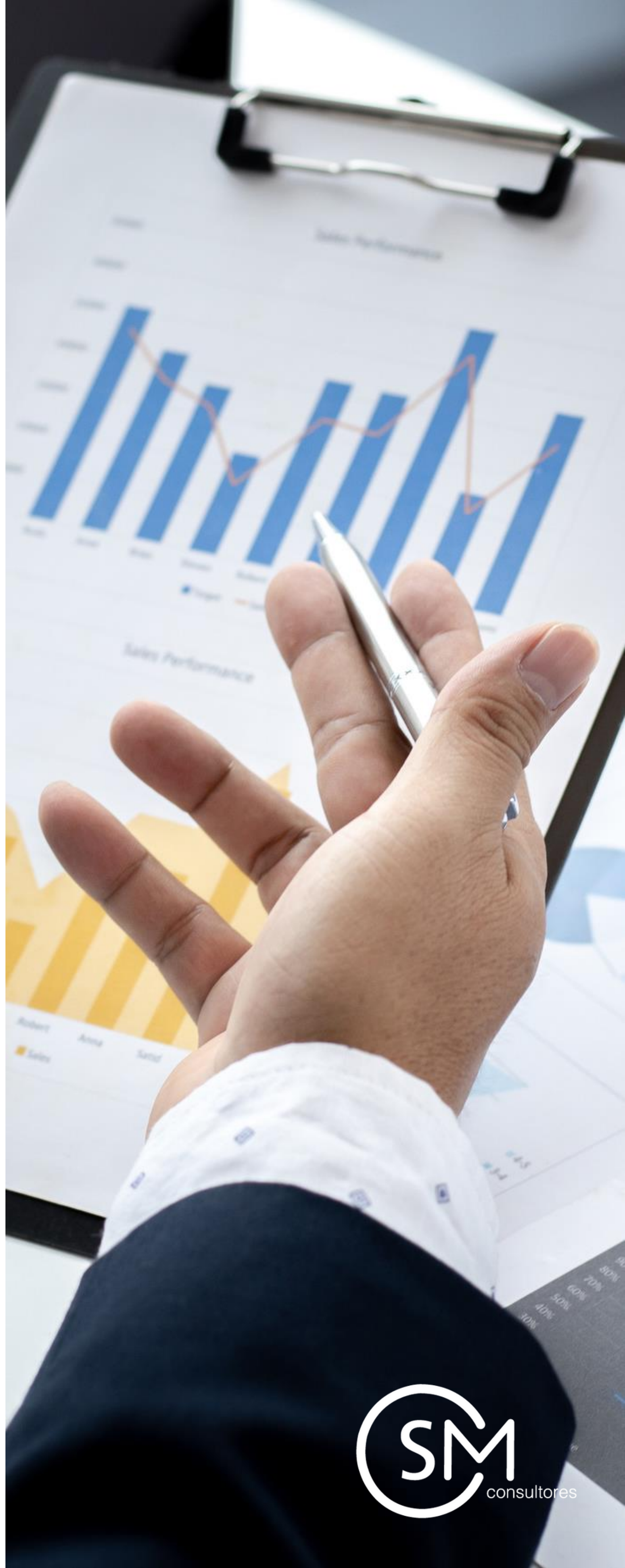
# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 07

Considere la siguiente información relacionada a una tabla de mortalidad:

| Edad (x) | $q_x$ |
|---|---|
| 60 | 0.001 |
| 61 | 0.002 |
| 62 | 0.003 |
| 63 | 0.004 |
| 64 | 0.005 |

Determinar la probabilidad de que una persona de edad 60 muera entre los 62 y 65 años. Dar la notación actuarial asociada.



# Breve repaso de Probabilidad

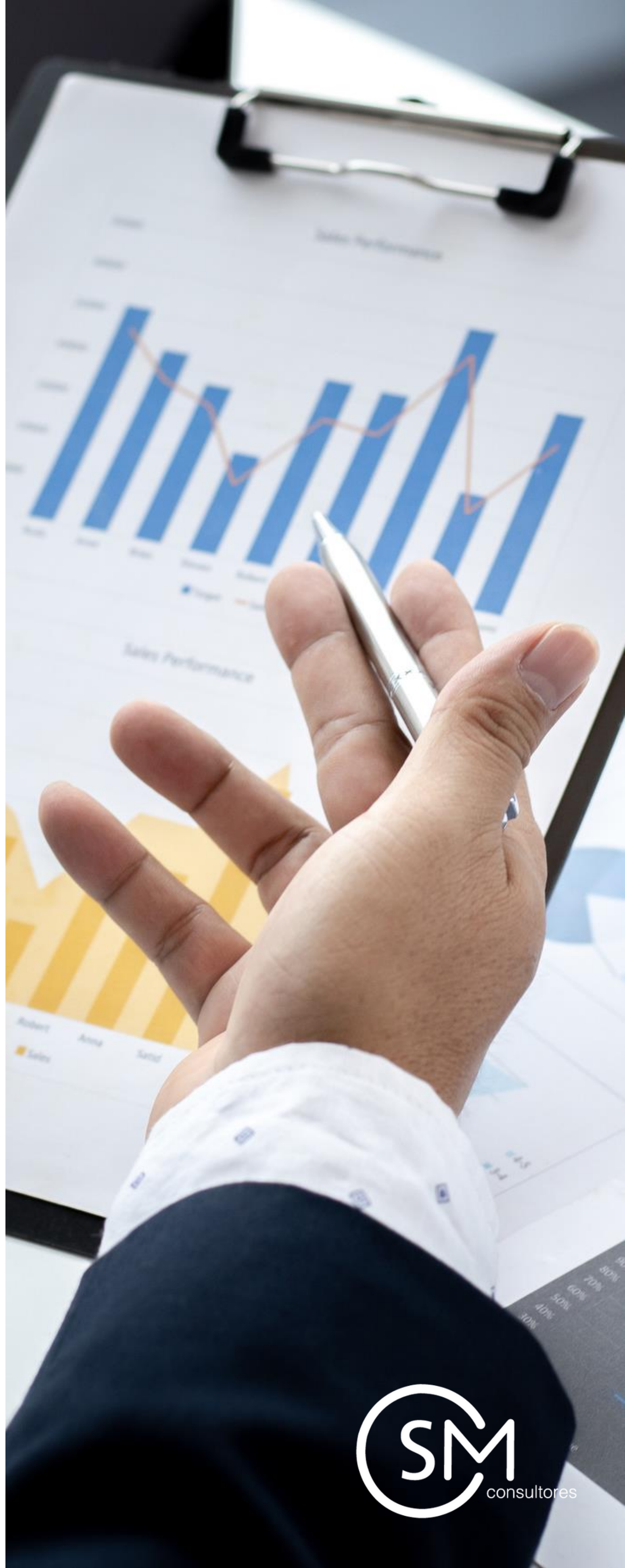
## EJERCICIO 08

Considere la siguiente información relacionada a una tabla de mortalidad:

| Edad (x) | $q_x$ |
|---|---|
| 60 | 0.001 |
| 61 | 0.002 |
| 62 | 0.003 |
| 63 | 0.004 |
| 64 | 0.005 |

Considere un radix de 1,000,000 a edad 60. Calcular $l_x$ para $x = 60,61,62,63 \text{ y } 64$.

Utilizando los valores de $l_x$ recalcular la probabilidad del ejercicio anterior.



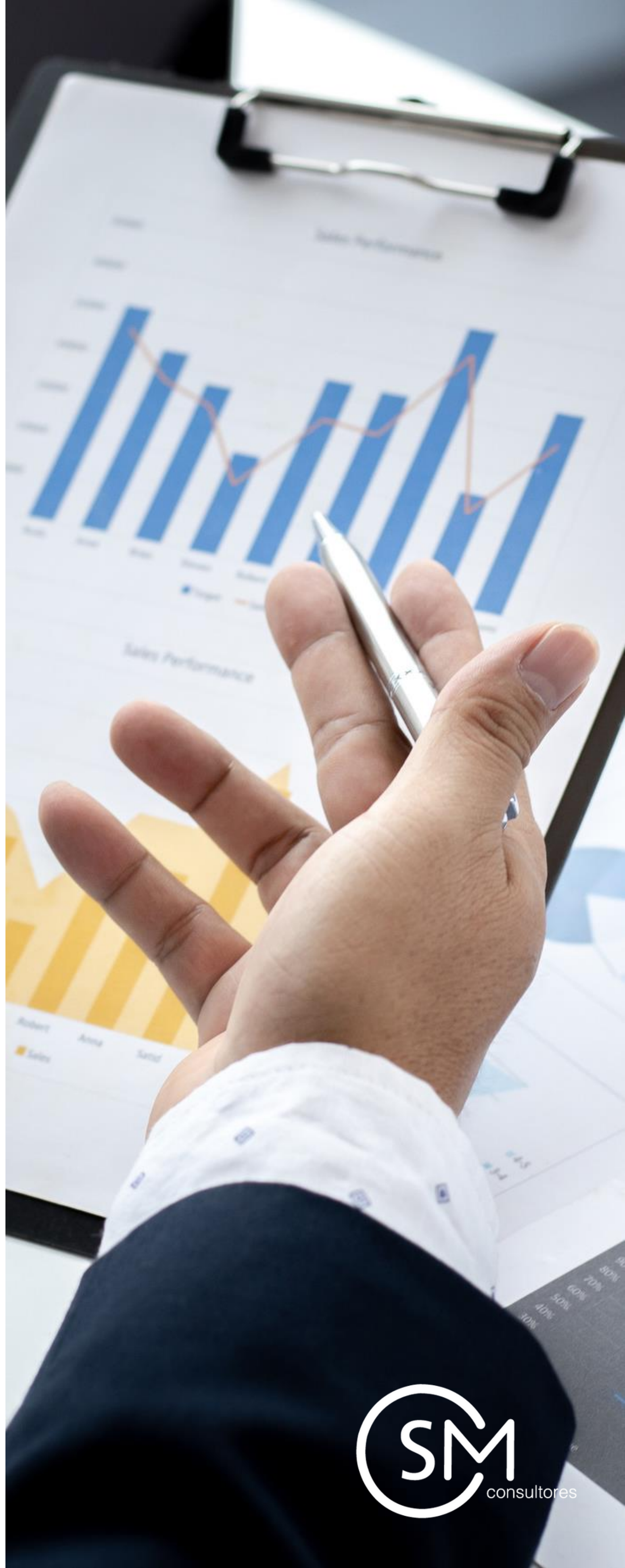
# Breve repaso de Probabilidad

## EJERCICIO 09

Considere la siguiente información

$$l_1 = 9700$$
$$q_1 = q_2 = 0.020$$
$$q_4 = 0.026$$
$$d_3 = 232$$

Determinar el número esperado de sobrevivientes a edad 5.



# Notación Actuarial

## VALOR PRESENTE ACTUARIAL

- El valor presente actuarial se define como el valor presente de *una unidad monetaria* pagadera a tiempo $n$, siempre y cuando una persona de edad $x$ sobreviva $n$ años más.

$$ {}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x $$

Valor presente actuarial $=$ Valor presente certero $v^n = (1+i)^{-n}$ $\times$ Probabilidad de que $(x)$ sobreviva $n$ años

# Notación Actuarial

## VALOR PRESENTE ACTUARIAL

Por ejemplo, consideremos $l_{25} = 95{,}650$, $l_{65} = 75{,}340$ y una tasa de interés efectiva anual $i = 6\%$.

Deseamos encontrar el Valor Presente Actuarial de un pago de \$1,000,000 que se realizará al final de 40 años siempre que una persona de edad 25 sobreviva a los 65 años.

Nos piden $1{,}000{,}000\ {}_nE_x = 1{,}000{,}000 v^{40}\ {}_{40}p_{25}$

$$= 1{,}000{,}000(1.06)^{-40}\left(\frac{75{,}340}{95{,}650}\right)$$

$$= \$75{,}578.35$$

# Notación Actuarial

## VALOR PRESENTE ACTUARIAL

### ¿Qué interpretación le damos al monto de $75,478.35 obtenido como Valor Presente Actuarial?

- Supongamos que $l_{25} = 95{,}650$ personas invierten dicho monto a tasa del 6% efectivo anual.
- Al final de 40 años, se tendrá un monto acumulado de $\$75{,}478.35 * 95650 * 1.06^{40} = \$75{,}340{,}000{,}000$
- Sin embargo, el número esperado de sobrevivientes a edad 65 es $l_{65} = 75{,}340$, por lo que a cada uno le corresponderá un monto de $1,000,000.

# Notación Actuarial

## ANUALIDADES CONTINGENTES

- Gracias a este concepto de Valor Presente Actuarial podemos calcular el valor presente de algunas Anualidades Contingentes importantes.

1. Anualidad que paga $1 al inicio de cada año mientras la persona sobreviva

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= 1 + v^1\ {}_1p_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\ {}_kE_x
\end{aligned}
$$

# Notación Actuarial

## ANUALIDADES CONTINGENTES

2. Anualidad que paga $1 al inicio de cada año, durante $n$ años, mientras la persona sobreviva

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + v^1 \ {}_1p_x + v^2 \ {}_2p_x + \cdots + v^{n-1} \ {}_{n-1}p_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \ {}_kE_x$$

# Notación Actuarial

## ANUALIDADES CONTINGENTES

3. Anualidad que paga $1 al inicio de cada año, iniciando en $n$ años, siempre y cuando la persona sobreviva.

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= v^n \ {}_np_x + v^{n+1} \ {}_{n+1}p_x + v^{n+2} \ {}_{n+2}p_x + \cdots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \ {}_kp_x \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} {}_kE_x
\end{aligned}
$$

Es importante notar de esta última que se cumple:

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n} $$

consultores

# Act. Omar Sagahon Menchaca

SOCIO & DIRECTOR


55 7372 3830

55 7576 4417

omar.sagahon@osmconsultores.com


www.osmconsultores.com

consultores