
# CURSO DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN DE CERTIFICACIÓN DE ACTUARIOS EN PASIVOS LABORALES

20 de mayo de 2022

## Cálculo actuarial Pasivos Laborales

**Curso especialmente diseñado para Willis Towers Watson**

# Hipótesis demográficas
## Tasas vs probabilidad

- Un punto de partida en la valuación actuarial de un plan de beneficios para los empleados es la utilización de hipótesis actuariales, las cuales deben de tratar de emular el fenómeno demográfico una empresa.

- Para ello, el especialista con ayuda de información histórica de la empresa, del mercado o de un país, construye tablas de decrementos que le permita estimar el grupo de personas que pudieran recibir o ser elegibles a un beneficio.

- Las tablas de decrementos más usadas en el mercado de los planes de beneficios para empleados son:

- Rotación
- Invalidez
- Muerte en servicio
- Retiro anticipado

SM consultores

# Decrementos

Definamos como:

- $q^{(\boldsymbol{m})} = Probabilidad\ de\ muerte$
- $q^{(\boldsymbol{i})} = Probabilidad\ de\ invalidez$
- $q^{(\boldsymbol{w})} = Probabilidad\ de\ rotación$
- $q^{(\boldsymbol{r})} = Probabilidad\ de\ retiro$

# Decrementos

## Tasa vs probabilidades

- La tasa de decrementos se refiere a la proporción de participantes en cierto estatus, bajo el supuesto de que no existen otros decrementos.

- Asumiendo distribución uniforme de muerte, la transformación de una tasa de probabilidad en una tabla donde existen cuatro decrementos, la cual está dada por:

$$q^{(m)} \approx q'^{(m)} * \left[1 - \tfrac{1}{2} q'^{(i)}\right]\left[1 - \tfrac{1}{2} q'^{(w)}\right]\left[1 - \tfrac{1}{2} q'^{(r)}\right]$$

$$q^{(\tau)} = q^{(m)} + q^{(i)} + q^{(w)} + q^{(r)}$$

$$p^{(\tau)} = 1 - q^{(\tau)}$$

$$q'^{(m)} \approx q^{(m)} * \left[1 + \frac{1}{2} q^{(i)}\right]\left[1 + \frac{1}{2} q^{(w)}\right] \ldots$$

# Decrementos

$$q^{(m)} \approx q'^{(m)} * \left[1-\frac{1}{2}q'^{(i)}\right]\left[1-\frac{1}{2}q'^{(w)}\right]\left[1-\frac{1}{2}q'^{(r)}\right]$$

## Construcción de una tabla de decrementos múltiples

| X | q’(m) | q’(i) | q’(w) | q(m) | q(i) | q(w) | q($\tau$) | p($\tau$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0.20 | 0.02 | 0.04 | 0.1940 | 0.0176 | 0.0356 | 0.2473 | 0.7527 |
| 66 | 0.25 | 0.02 | 0.06 | 0.2401 | 0.0170 | 0.0520 | 0.3090 | 0.6910 |
| 67 | 0.30 | 0.02 | 0.08 | 0.2851 | 0.0163 | 0.0673 | 0.3688 | 0.6312 |
| 68 | 0.35 | 0.02 | 0.10 | 0.3292 | 0.0157 | 0.0817 | 0.4265 | 0.5735 |
| 69 | 0.40 | 0.02 | 0.12 | 0.3722 | 0.0150 | 0.0950 | 0.4823 | 0.5177 |

$${}_2P_{65}^{(\tau)} = P_{65}^{(\tau)} P_{66}^{(\tau)} = (0.7527)\ (0.6910) = 0.5201$$

$${}_{2\,/}q_{66}^{(m)} = P_{66}^{(\tau)} P_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(m)} = (0.6910)\ (0.6312)\ (0.3292) = 0.1436$$

$${}_2\,q_{67}^{(w)} = q_{67}^{(w)} + P_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(w)} = (0.0673) + (0.6312)\ (0.0817) = 0.1189$$

# Decrementos
# Ejercicio 1

- Considerando los siguientes datos:

$$q_x'^{(1)} = 0.20 \qquad q_x'^{(2)} = 0.20 \qquad q_x'^{(3)} = 0.40$$

- Encontrar el valor de $q_x^{(\tau)}$

A. Menos de 0.625
B. Más de 0.625 pero menor que 0.685
C. Más de 0.685 pero menor que 0.745
D. Más de 0.745 pero menor de 0.805
E. 0805 o más

# Decrementos
# Ejercicio 2

- Considerando los siguientes datos:

$$\ell^{\tau}_{30} = 1{,}000{,}000 \qquad d^{(1)}_{30} = 2{,}680 \qquad d^{(2)}_{30} = 824 \qquad d^{(3)}_{30} = 100{,}000$$

$$q^{(1)}_{30+t} = q^{(1)}_{30+t-1} \qquad q^{(2)}_{30+t} = 1.04\,q^{(2)}_{30+t-1} \qquad q^{(3)}_{30+t} = q^{(3)}_{30+t-1}$$

- Encontrar el valor de $\;{}_{3}q^{(2)}_{31}$

A. Menos de 0.00205
B. Más de 0.00205 pero menor que 0.00220
C. Más de 0.00220 pero menor que 0.00235
D. Más de 0.00235 pero menor de 0.00250
E. 0.00250 o más

# Decrementos
# Ejercicio 3

- Considerando los siguientes decrementos:

| x | $\ell_x^{\tau}$ | $d_x^{(mortalidad)}$ |
|---|---|---|
| 25 | 807,959 | 314 |
| 26 | 721,013 | 324 |
| 27 | 640,304 | 329 |

$\ell'_{25}$ asociado a un solo decremento de mortalidad : 1,000,000

- Encontrar el valor de $\ell'_{26}$

A. Menos de 999,550
B. 999,550 pero menor que 999,600
C. 999,600 pero menor que 999,650
D. 999,650 pero menor de 999,700
E. Mayor que 999,700

# Decrementos
# Ejercicio 4

$$q'^{(m)} \approx q^{(m)} * \left[1+\frac{1}{2}q^{(i)}\right]\left[1+\frac{1}{2}q^{(w)}\right]\dots$$

- Considerando los siguientes datos:

| x | $q_x^{(d)}$ | $q_x^{(w)}$ |
|---|---|---|
| 20 | 0.001311 | 0.05 |
| 21 | 0.001267 | 0.05 |
| 22 | 0.001219 | 0.05 |

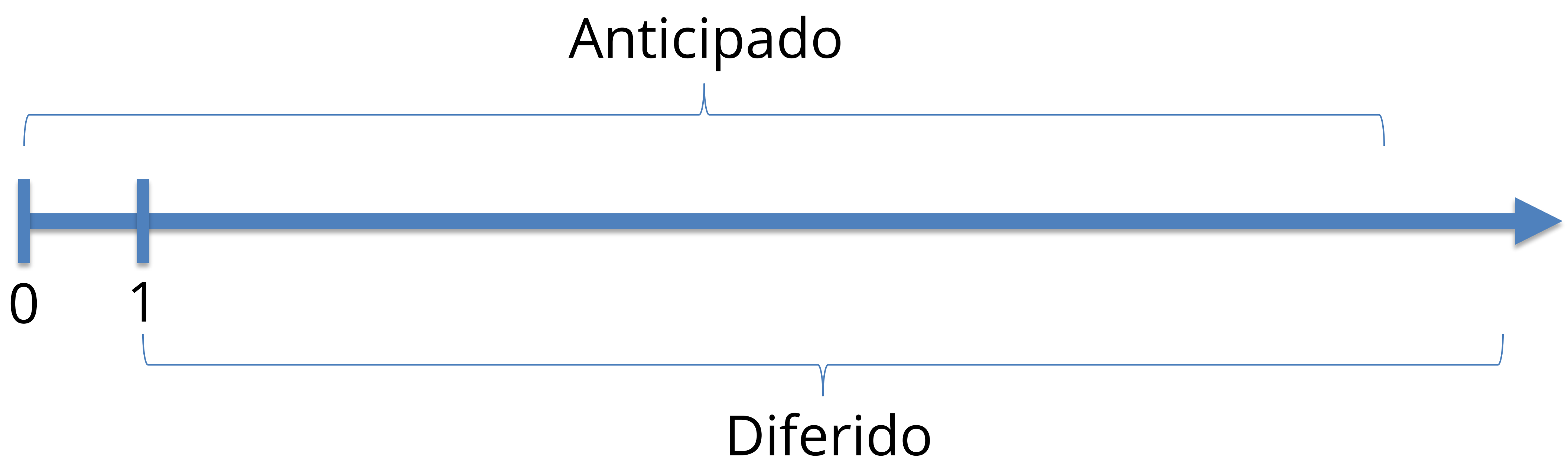
- Encontrar el valor de $_{2}p'^{(d)}_{20}$

A. Menos de 0.99728
B. Más de 0.99728 pero menor que 0.99733
C. Más de 0.99733 pero menor que 0.99738
D. Más de 0.099738 pero menor de 0.99743
E. 0.99743 o más

# Anualidades

- Existen anualidades anticipadas (ä) y anualidades vencidas (a)

- La diferencia es el momento en que se hacen los pagos, en el caso de ä el pago es la inicio del año




- Una anualidad es una suma, que se define de la siguiente forma:

Cierta/Financiera $P\ddot{a}_{\overline{n|}} = P * \sum_{t=0}^{n-1} v^t$

Contingente $\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} P_t * v^t * {}_tp_x$

- La formula anterior es para anualidades con pagos anuales, para convertir a anualidad con m pagos podemos usar la aproximación:

$$\ddot{a}^{(m)}{}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = a_{\overline{n|}} * \frac{i}{i^{(m)}}$$

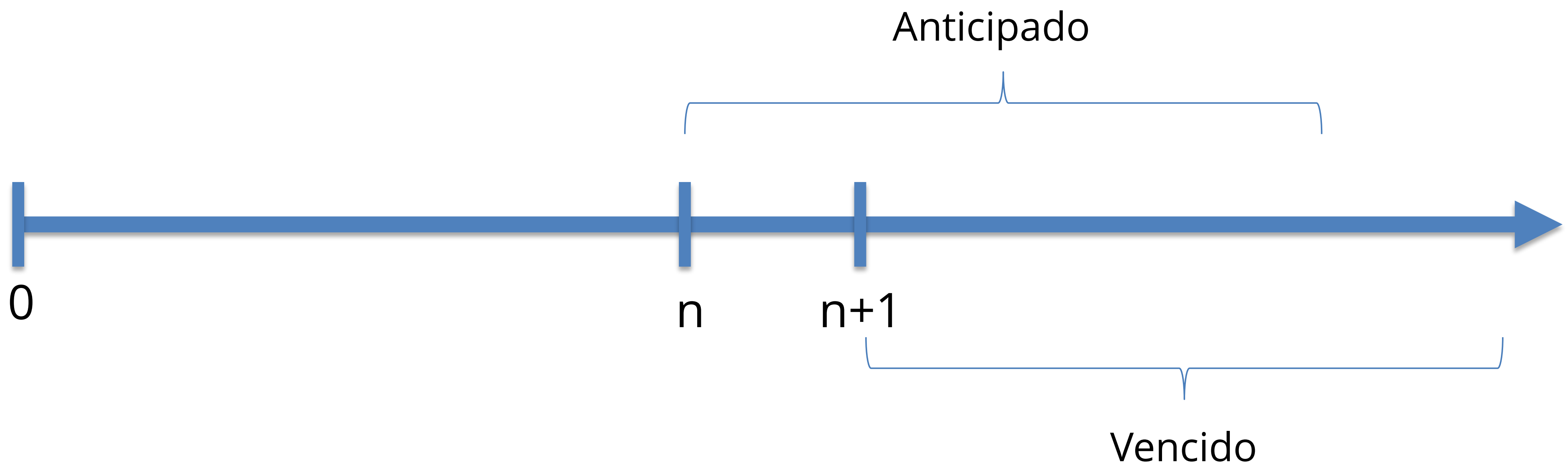
Donde:

$i^{(m)} = m \times (1+i)^{1/m} - 1$

# Anualidades diferidas

- Una anualidad diferida es la una renta que se empieza a pagar en un periodo de tiempo mayor a un año.

$n/\ \ddot{a}_x^{(m)}$




$n/\ a_x^{(m)}$

- Una anualidad es una suma pagos, la cual se expresa de la siguiente forma:

Cierta/Financiera $n\ /\ \ddot{a}_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{\infty} P_t * v^{t+n}$ Contingente $n/\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{\infty} P_t * v^{t+n} * {}_tp_{x+n}$

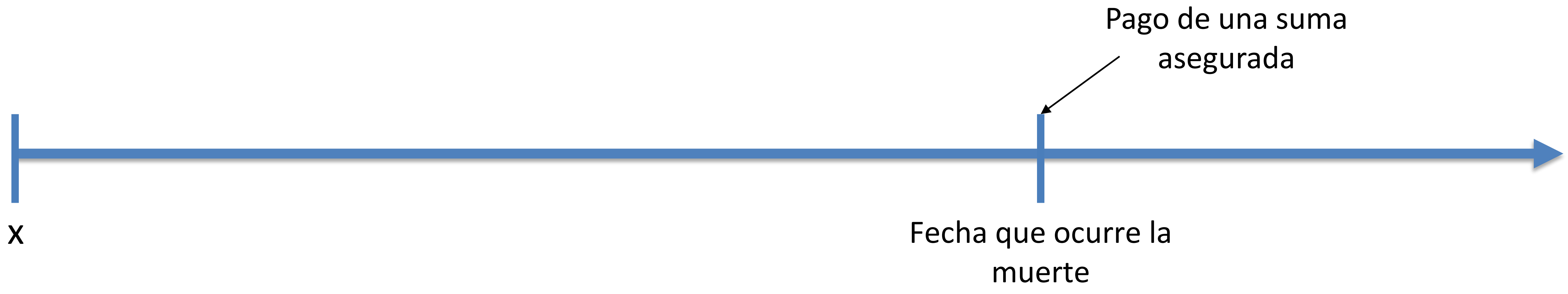
- La fórmula anterior es para anualidades con pagos anuales, para convertir a anualidad con m pagos podemos usar la aproximación:

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n * \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right)$$

# Seguros de vida

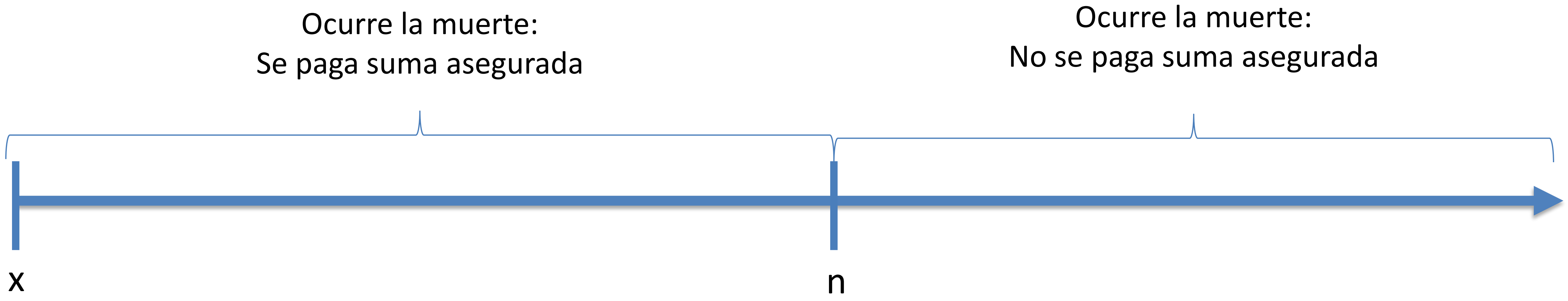
## Seguro tradicional u ordinario de vida $A_x$

- Un Seguro de vida tradicional paga una suma asegurada a los beneficiarios, al momento de la muerte del asegurado. A continuación se muestra en la siguiente gráfica.




## Seguro temporal $A_{x:\overline{n}|}$

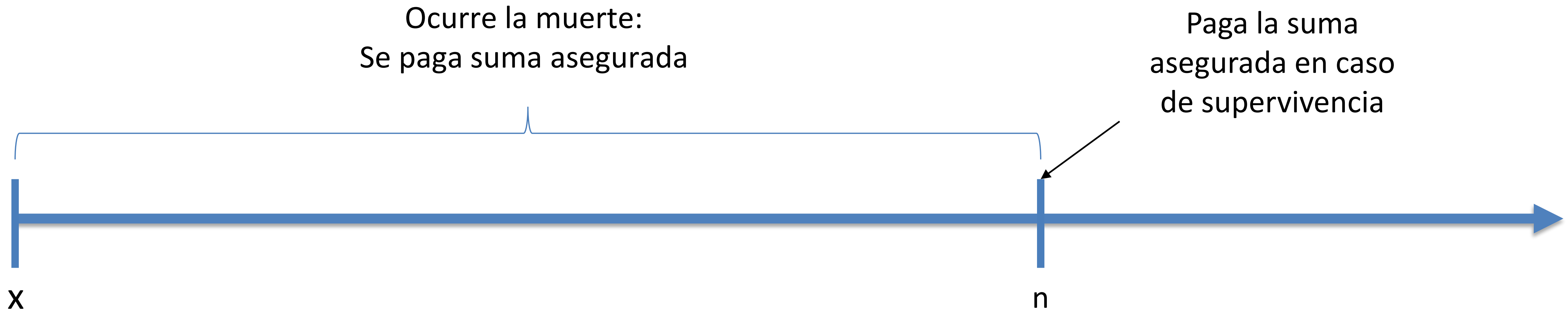
- Un Seguro de vida temporal paga una suma asegurada a los beneficiarios, siempre y cuando ésta ocurra antes de una fecha determinada.




# Seguros de vida

**Seguro dotal mixto** $A_{x:\overline{n}|} + {}_{n}E_{x}$

- Es el que cubre tanto los riesgos del asegurado como el ahorro. En caso de que el fallecimiento suceda antes del plazo establecido, los beneficiarios reciben el monto total asegurado inclusive cuando este no haya sido liquidado por completo.




# Formulario

$$ {}_{t}p_x + {}_{t}q_x = 1 $$

$$ {}_{t+u}p_x = {}_{t}p_x * {}_{u}p_{x+t} $$

$$ {}_{t/u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x = {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x = {}_{t}p_x * {}_{u}q_{x+t} $$

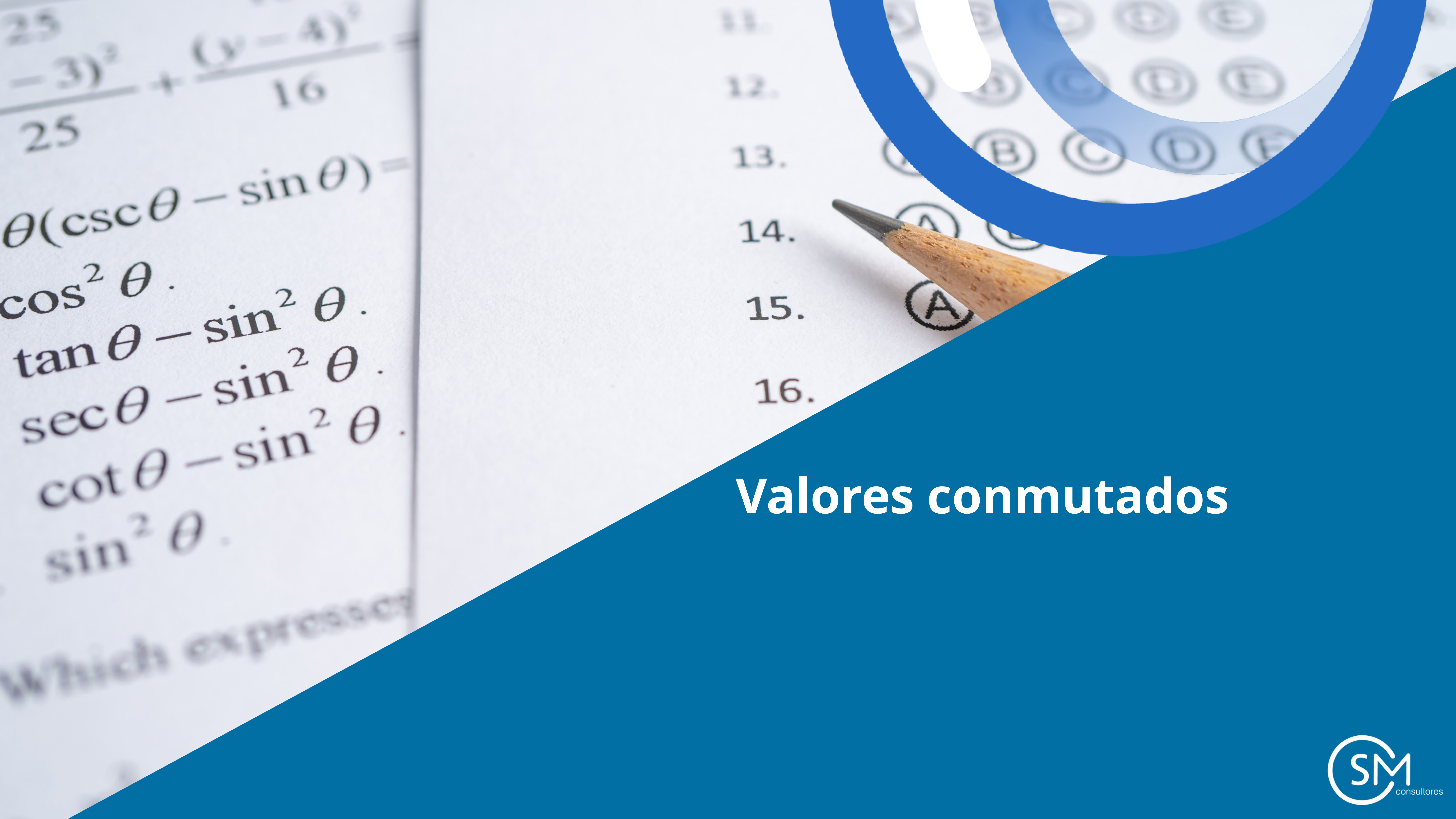
$$ \ddot{a}^{(m)}{}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} $$

$$ {}_{n/}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n * \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right) $$

$$ \ddot{a}_{\overline{xy}}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} + \% \left( \ddot{a}_y^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)} \right) $$

$$ A_x = 1 - d * \ddot{a}_x^{(m)}, $$ **Donde** $$ d = \frac{i}{1+i} $$

$$ a_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|} * \frac{i}{i^{(m)}} $$ **Donde** $$ i^{(m)} = m \times (1+i)^{1/m} - 1 $$




# Valores conmutados

# Conmutados

| X | $q_x^{(k)}$ | $p_x^{(k)}$ | $l_x^{(k)}$ | $d_x^{(k)}$ | $tp_x^{(k)}$ | $tp_x^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0.0019700 | 0.9980300 | **1,000,000** | 1,970.00 | **1** | **1** |
| 21 | 0.0020200 | 0.9979800 | 998,030.00 | 2,016.02 | 0.99803 | 0.99803 |
| 22 | 0.0020900 | 0.9979100 | 996,013.98 | 2,081.67 | 0.99601 | 0.99601 |
| 23 | 0.0021500 | 0.9978500 | 993,932.31 | 2,136.95 | 0.99393 | 0.99393 |
| 24 | 0.0022200 | 0.9977800 | 991,795.36 | 2,201.79 | 0.99179 | 0.99179 |
| 25 | 0.0023000 | 0.9977000 | 989,593.57 | 2,276.07 | 0.98959 | 0.98959 |

$$tp_{20}^{(k)} = \prod_{t}^{\infty} p_x^{(k)} = 1(0.99803)(0.99798)(0.99791)\ldots$$

$$tp_{20}^{(k)} = \frac{l_{x+t}^{(k)}}{l_x^{(k)}} = \frac{[illegible]}{1,000,000.00}$$

# Conmutados

Tasa de interés = 8% anual

| | $1-q_x^{(k)}$ | $l_x^{(k)} * p_x^{(k)}$ | $\frac{1}{(1+i)^x}$ | $l_{x+t}^{(k)} * v^{x+t}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **X** | $q_x^{(k)}$ | $p_x^{(k)}$ | $l_x^{(k)}$ | $v^x$ | $D_x^{(k)}$ |
| 20 | 0.0019700 | 0.9980300 | **1,000,000** | 0.21455 | 214,548.21 |
| 21 | 0.0020200 | 0.9979800 | 998,030.00 | 0.19866 | 198,264.40 |
| 22 | 0.0020900 | 0.9979100 | 996,013.98 | 0.18394 | 183,207.32 |
| 23 | 0.0021500 | 0.9978500 | 993,932.31 | 0.17032 | 169,281.86 |
| 24 | 0.0022200 | 0.9977800 | 991,795.36 | 0.15770 | 156,405.47 |
| 25 | 0.0023000 | 0.9977000 | 989,593.57 | 0.14602 | 144,498.38 |

$$D_x^{(k)} = l_{x+t}^{(k)} * v^{x+t} = 1{,}000{,}000\ (0.21455) = 214{,}548.21$$

Ejercicio: Determinar el valor presente actuarial de un pago de \$20,000 que se realizará a los 24 años de edad cumplidos, suponiendo un grupo de personas de 5 integrantes y todos cuentan con una edad actual de 21 años.

$$\$20{,}000 * \frac{D_{x+t}^{(k)}}{D_x^{(k)}} = \$20{,}000 * \frac{156{,}405.47}{198{,}248.21} =$$

**\$ 15,778.75**

**x 5**

$$\$20{,}000 * \frac{l_{x+t}^{(k)}}{l_x^{(k)}} v^t = \$20{,}000 * \frac{991{,}795.36}{998{,}030} v^t =$$

$v^3 = 0.79383224$

**15,777.46**

**x 5**

# Conmutados

Tasa de interés = 8% anual

$1 - q_x^{(k)}$ $\qquad$ $l_{x+t}^{(k)} * v^{x+t}$ $\qquad$ $\sum_{0}^{\infty} D_{x+t}^{(k)}$

| X | $q_x^{(k)}$ | $p_x^{(k)}$ | $l_x^{(k)}$ | $v^x$ | $D_x^{(k)}$ | $N_x^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0.0019700 | 0.9980300 | **1,000,000** | 0.21455 | 214,548.21 | 1,066,205.6 |
| 21 | 0.0020200 | 0.9979800 | 998,030.00 | 0.19866 | 198,264.40 | 851,657.4 |
| 22 | 0.0020900 | 0.9979100 | 996,013.98 | 0.18394 | 183,207.32 | 653,393.0 |
| 23 | 0.0021500 | 0.9978500 | 993,932.31 | 0.17032 | 169,281.86 | 470,185.7 |
| 24 | 0.0022200 | 0.9977800 | 991,795.36 | 0.15770 | 156,405.47 | 300,903.9 |
| 25 | 0.0023000 | 0.9977000 | 989,593.57 | 0.14602 | 144,498.38 | 144,498.4 |

$$N_x^{(k)} = \sum_{0}^{\infty} D_{x+t}^{(k)} = 214{,}54.21 + 198{,}264.40 + 183{,}207.32 + \ldots..$$

Chester Wallace Jordan p. 48

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{N_x}{D_x} + \frac{m-1}{2m}$$

Vencida pagadera m veces al año

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}$$

Anticipada pagadera m veces al año

# Conmutados

## Anualidades vitalicias

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x^{(k)}}{D_x^{(k)}} \qquad a_x^{(m)} = \frac{N_x^{(k)}}{D_x^{(k)}} + \frac{m-1}{2m} \qquad \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(k)}}{D_x^{(k)}} - \frac{m-1}{2m}$$

## Anualidades temporales

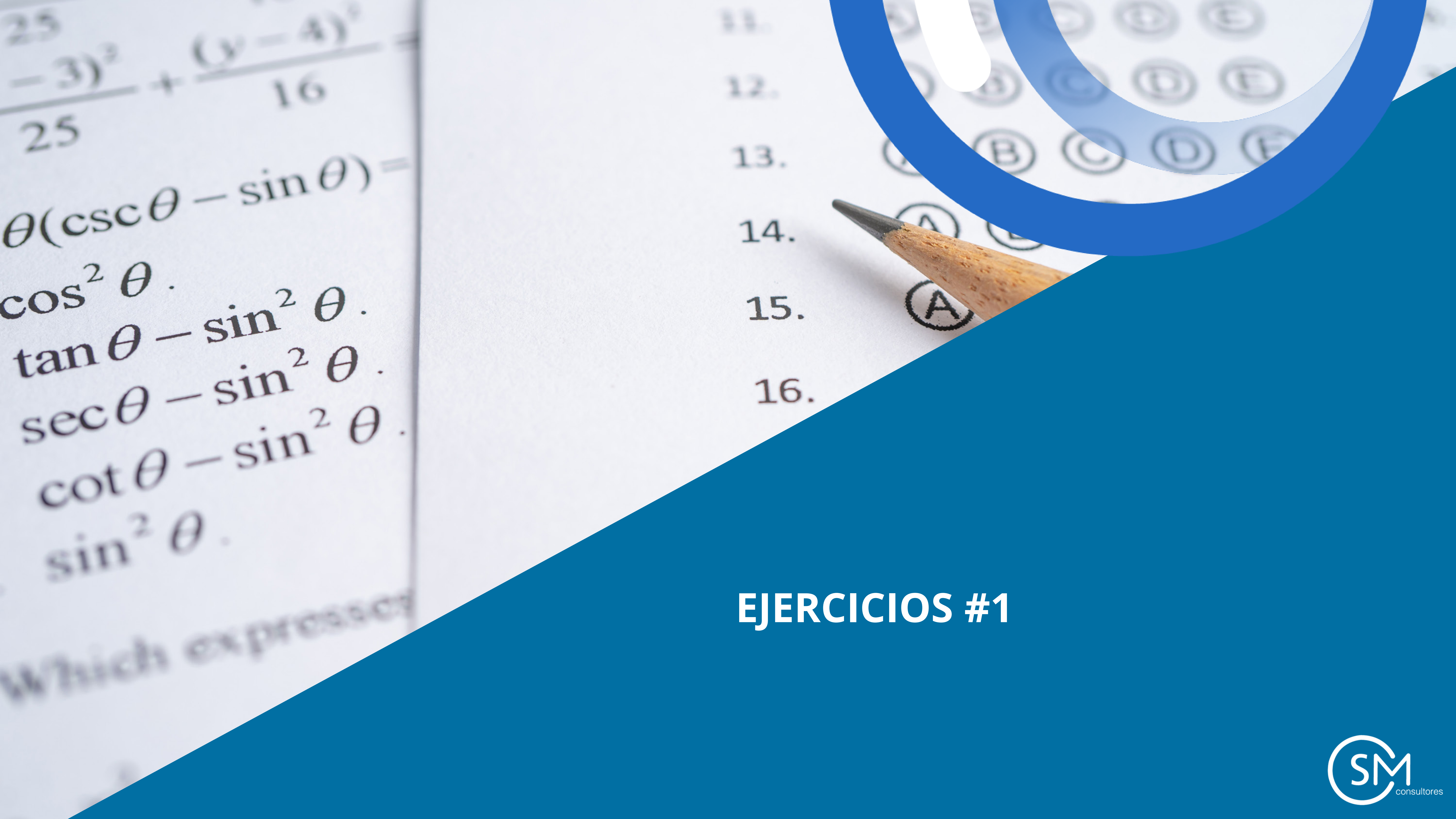
$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x^{(k)} - N_{x+t}^{(k)}}{D_x^{(k)}} \qquad \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{N_x^{(k)} - N_{x+n}^{(k)} - \frac{m-1}{2m}\left(D_x^{(k)} - D_{x+n}^{(k)}\right)}{D_x^{(k)}}$$

## Anualidades diferidas

$$n/a_x = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}}\left(\frac{N_{x+n}^{(k)}}{D_{x+n}^{(k)}}\right) = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}}\, a_{x+n}$$

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}}\left(\frac{N_{x+n}^{(k)}}{D_{x+n}^{(k)}} - \frac{m-1}{2m}\right) = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}}\, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$n/\ddot{a}_{x:\overline{m}|}^{(m)} = \frac{N_{x+n}^{(k)} - N_{x+n+m}^{(k)} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x+n}^{(k)} - D_{x+n+m}^{(k)}\right)}{D_x^{(k)}}$$




# EJERCICIOS #1

SM consultores

# Ejercicio 5

**Datos:**
Considerando un beneficio a la jubilación de $250 por mes comenzando desde edad 55
Forma normal de pago: Anualidad vitalicia con 5 años de garantía
Tasa de interés: 6% anual
Solamente un participante con fecha de nacimiento de 1/1/71

**Valores conmutados seleccionados:**

| x | Nx |
|---|---|
| 50 | 67,129 |
| 51 | 62,016 |
| 55 | 44,721 |
| 56 | 41,056 |
| 60 | 28,659 |
| 61 | 26,066 |

$$\ddot{a}^{(12)}_{5\neg 6\%} = 4.348$$

**¿En qué rango de valor está el valor presente del beneficio a la fecha de valuación 1/1/2021?**

A. Menos de $25,750
B. $25,750 pero menor que $26,000
C. $26,000 pero menor que $26,250
D. 26,250 pero menor de $26,500
E. $26,500

OSM consultores


## Act. Omar Sagahon Menchaca

SOCIO & DIRECTOR

55 7372 3830

55 7576 4417

omar.sagahon@osmconsultores.com


www.osmconsultores.com