



# **CURSO DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN DE CERTIFICACIÓN DE ACTUARIOS EN PASIVOS LABORALES**

## **Cálculo actuarial Pasivos Laborales**

**Curso especialmente diseñado para Willis Towers Watson**

23 de mayo de  
2022



# Hipótesis demográficas

## Tasas vs probabilidad



- Un punto de partida en la valuación actuarial de un plan de beneficios para los empleados es la utilización de hipótesis actuariales, las cuales deben de tratar de emular el fenómeno demográfico una empresa.
- Para ello, el especialista con ayuda de información histórica de la empresa, del mercado o de un país, construye tablas de decrementos que le permita estimar el grupo de personas que pudieran recibir o ser elegibles a un beneficio.
- Las tablas de decrementos más usadas en el mercado de los planes de beneficios para empleados son:
  - Rotación
  - Invalidez
  - Muerte en servicio
  - Retiro anticipado

# Decrementos

Definamos como:

- $q^{(m)}$  = Probabilidad de muerte
- $q^{(i)}$  = Probabilidad de invalidez
- $q^{(w)}$  = Probabilidad de rotación
- $q^{(r)}$  = Probabilidad de retiro



# Decrementos

## Tasa vs probabilidades

- La tasa de decrementos se refiere a la proporción de participantes en cierto estatus, bajo el supuesto de que no existen otros decrementos.
- Asumiendo distribución uniforme de muerte, la transformación de una tasa de probabilidad en una tabla donde existen cuatro decrementos, la cual está dada por:

$$q^{(m)} \approx q'^{(m)} * \left[1 - \frac{1}{2}q^{(i)}\right] \left[1 - \frac{1}{2}q^{(w)}\right] \left[1 - \frac{1}{2}q^{(r)}\right]$$

$$q^{(\tau)} = q^{(m)} + q^{(i)} + q^{(w)} + q^{(r)}$$

$$p^{(\tau)} = 1 - q^{(\tau)}$$

$$q'^{(m)} \approx q^{(m)} * \left[1 + \frac{1}{2}q^{(i)}\right] \left[1 + \frac{1}{2}q^{(w)}\right] \dots$$

# Decrementos

$$q^{(m)} \approx q'^{(m)} * \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(i)}\right] \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(w)}\right] \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(r)}\right]$$

Construcción de una tabla de decrementos múltiples

X	q'(m)	q'(i)	q'(w)	q(m)	q(i)	q(w)	q( $\tau$ )	p( $\tau$ )
65	0.20	0.02	0.04	0.1940	0.0176	0.0356	0.2473	0.7527
66	0.25	0.02	0.06	0.2401	0.0170	0.0520	0.3090	0.6910
67	0.30	0.02	0.08	0.2851	0.0163	0.0673	0.3688	0.6312
68	0.35	0.02	0.10	0.3292	0.0157	0.0817	0.4265	0.5735
69	0.40	0.02	0.12	0.3722	0.0150	0.0950	0.4823	0.5177

$${}_2P_{65}^{(\tau)} = P_{65}^{(\tau)} P_{66}^{(\tau)} = (0.7527) (0.6910) = 0.5201$$

$${}_2/q_{66}^{(m)} = P_{66}^{(\tau)} P_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(m)} = (0.6910) (0.6312) (0.3292) = 0.1436$$

$${}_2q_{67}^{(w)} = q_{67}^{(w)} + P_{67}^{(\tau)} q_{68}^{(w)} = (0.0673) + (0.6312) (0.0817) = 0.1189$$



# Decrementos

## Ejercicio 1

- Considerando los siguientes datos:

$$q_x^{(1)} = 0.20 \quad q_x^{(2)} = 0.20 \quad q_x^{(3)} = 0.40$$

- Encontrar el valor de  $q_x^{(\tau)}$

- A. Menos de 0.625
- B. Más de 0.625 pero menor que 0.685
- C. Más de 0.685 pero menor que 0.745

- D. Más de 0.745 pero menor de 0.805
- E. 0.805 o más



# Decrementos

## Ejercicio 2

- Considerando los siguientes datos:

$$l_{30}^{\tau} = 1,000,000 \quad d_{30}^{(1)} = 2,680 \quad d_{30}^{(2)} = 824 \quad d_{30}^{(3)} = 100,000$$

$$q_{30+t}^{(1)} = q_{30+t-1}^{(1)} \quad q_{30+t}^{(2)} = 1.04 q_{30+t-1}^{(2)} \quad q_{30+t}^{(3)} = q_{30+t-1}^{(3)}$$

- Encontrar el valor de  $3q_{31}^{(2)}$

- A. Menos de 0.00205
- B. Más de 0.00205 pero menor que 0.00220
- C. Más de 0.00220 pero menor que 0.00235
- D. Más de 0.00235 pero menor de 0.00250
- E. 0.00250 o más

# Decrementos

## Ejercicio 3

- Considerando los siguientes decrementos:

$x$	$l_x^\tau$	$d_x^{(mortalidad)}$
25	807,959	314
26	721,013	324
27	640,304	329

$l'_{25}$  asociado a un solo decremento de mortalidad : 1,000,000

- Encontrar el valor de  $l'_{26}$

A. Menos de 999,550

B. 999,550 pero menor que 999,600

C. 999,600 pero menor que 999,650

D. 999,650 pero menor de 999,700

E. Mayor que 999,700



# Decrementos

## Ejercicio 4

$$q^{(m)} \approx q^{(m)} * \left[ 1 + \frac{1}{2} q^{(i)} \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} q^{(w)} \right] \dots$$

- Considerando los siguientes datos:

x	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$
20	0.001311	0.05
21	0.001267	0.05
22	0.001219	0.05

- Encontrar el valor de  ${}_2p'_{20}^{(d)}$

A. Menos de 0.99728

B. Más de 0.99728 pero menor que 0.99733

C. Más de 0.99733 pero menor que 0.99738

D. Más de 0.099738 pero menor de 0.99743

E. 0.99743 o más

# Anualidades

- Existen anualidades anticipadas ( $\ddot{a}$ ) y anualidades vencidas ( $a$ )
- La diferencia es el momento en que se hacen los pagos, en el caso de  $\ddot{a}$  el pago es la inicio del año



- Una anualidad es una suma, que se define de la siguiente forma:

$$\text{Cierta/Financiera } P\ddot{a}_n^{-1} = P * \sum_{t=0}^{n-1} v^t \quad \text{Contingente } \ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} P_t * v^t * {}_t p_x$$

- La formula anterior es para anualidades con pagos anuales, para convertir a anualidad con  $m$  pagos podemos usar la aproximación:

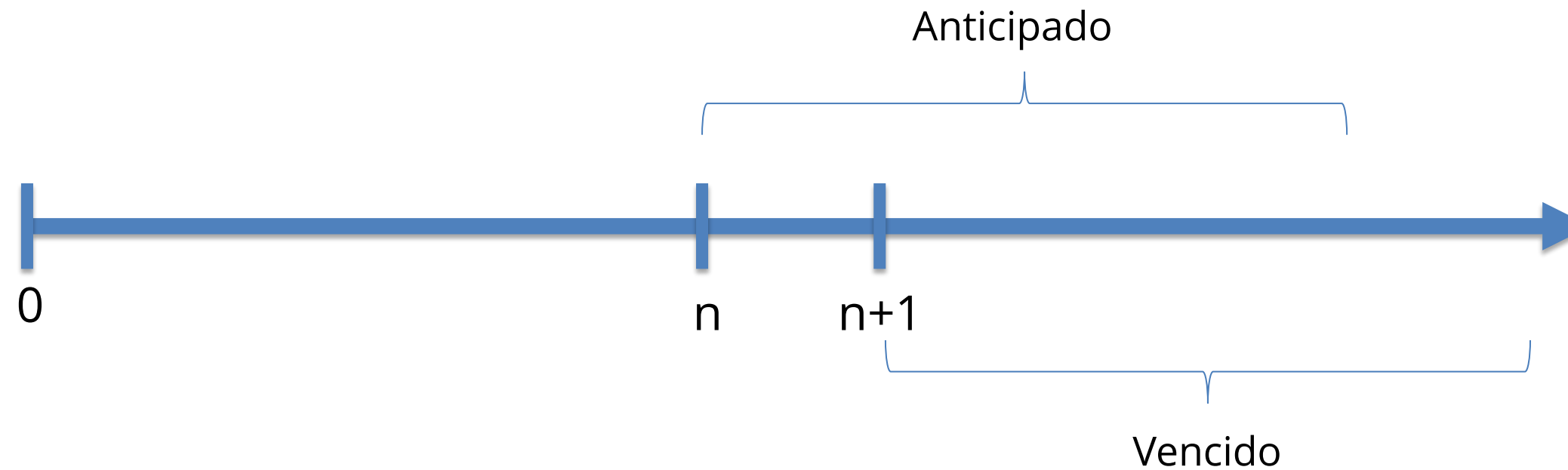
$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \quad a_n^{(m)} = a_n^{-1} * \frac{i}{i^{(m)}} \quad \text{Donde: } i^{(m)} = m \times (1+i)^{1/m} - 1$$



# Anualidades diferidas

- Una anualidad diferida es la una renta que se empieza a pagar en un periodo de tiempo mayor a un año.

$$n / \ddot{a}_x^{(m)}$$



$$n / a_x^{(m)}$$

- Una anualidad es una suma pagos, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\text{Cierta/Financiera } n / \ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{\infty} P_t * v^{t+n} \quad \text{Contingente } n / \ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{\infty} P_t * v^{t+n} * t p_{x+n}$$

- La fórmula anterior es para anualidades con pagos anuales, para convertir a anualidad con m pagos podemos usar la aproximación:

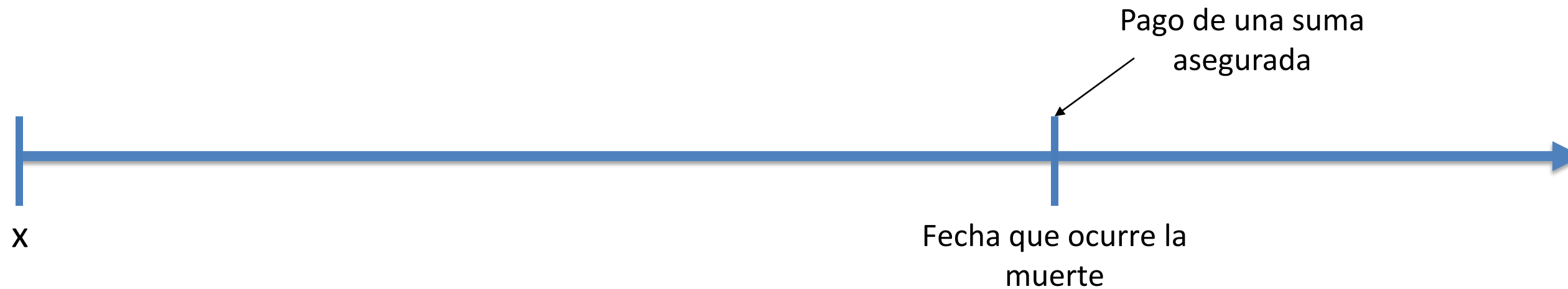
$$n / \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n * \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right)$$



# Seguros de vida

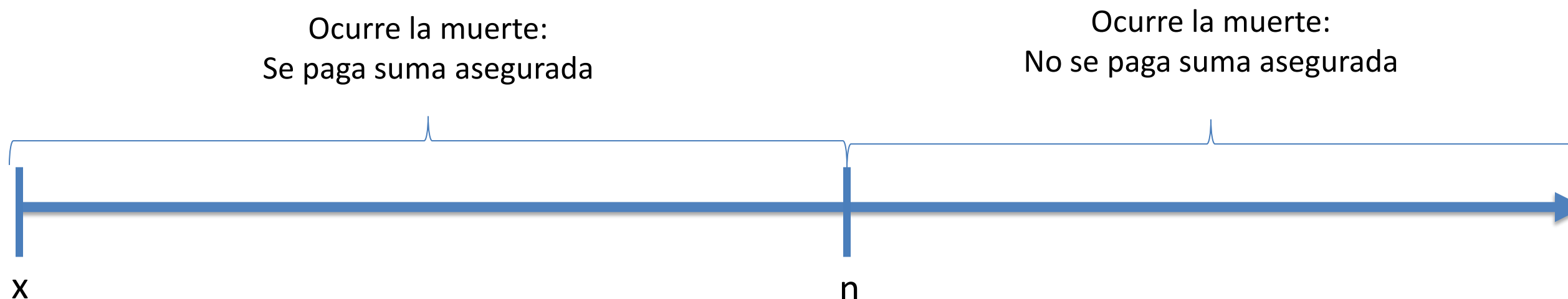
## Seguro tradicional u ordinario de vida $A_x$

- Un Seguro de vida tradicional paga una suma asegurada a los beneficiarios, al momento de la muerte del asegurado. A continuación se muestra en la siguiente gráfica.



## Seguro temporal $A_{x:n}$

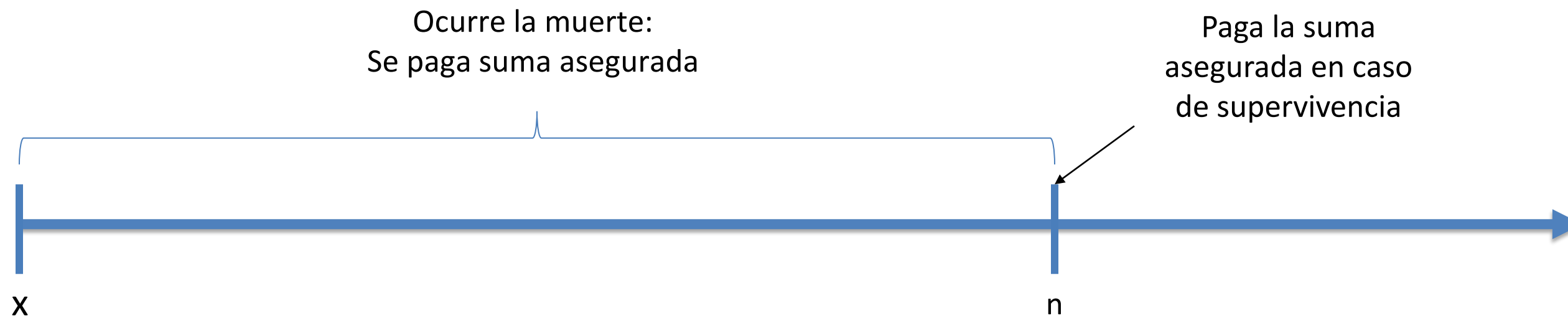
- Un Seguro de vida temporal paga una suma asegurada a los beneficiarios, siempre y cuando ésta ocurra antes de una fecha determinada.



# Seguros de vida

Seguro dotal mixto  $A_{x:n}^{-} + nE_x$

- Es el que cubre tanto los riesgos del asegurado como el ahorro. En caso de que el fallecimiento suceda antes del plazo establecido, los beneficiarios reciben el monto total asegurado inclusive cuando este no haya sido liquidado por completo.



# Formulario

$${}_t p_x + {}_t q_x = 1$$

$${}_{t+u} p_x = {}_t p_x * {}_u p_{x+t}$$

$${}_t / u q_x = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x = {}_t p_x * {}_u q_{x+t}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$${}_n / \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n * \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right)$$

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} + \% \left( \ddot{a}_y^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)} \right)$$

$$A_x = 1 - d * \ddot{a}_x^{(m)},$$

**Donde**

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$a_n^{-1(m)} = a_n^{-1} * \frac{i}{i^{(m)}}$$

**Donde**

$$i^{(m)} = m \times (1+i)^{1/m} - 1$$



$$\frac{(-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16}$$

$$\theta(\csc \theta - \sin \theta) =$$

$$\cos^2 \theta.$$

$$\tan \theta - \sin^2 \theta.$$

$$\sec \theta - \sin^2 \theta.$$

$$\cot \theta - \sin^2 \theta.$$

$$\sin^2 \theta.$$

Which expression

- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.

# Valores conmutados

# Conmutados

$x$	$q_x^{(k)}$	$p_x^{(k)}$	$l_x^{(k)}$	$d_x^{(k)}$	$tp_x^{(k)}$	$tp_x^{(k)}$
20	0.0019700	0.9980300	<b>1,000,000</b>	1,970.00	<b>1</b>	<b>1</b>
21	0.0020200	0.9979800	998,030.00	2,016.02	0.99803	0.99803
22	0.0020900	0.9979100	996,013.98	2,081.67	0.99601	0.99601
23	0.0021500	0.9978500	993,932.31	2,136.95	0.99393	0.99393
24	0.0022200	0.9977800	991,795.36	2,201.79	0.99179	0.99179
25	0.0023000	0.9977000	989,593.57	2,276.07	0.98959	0.98959

$$tp_{20}^{(k)} = \prod_t^{\infty} p_x^{(k)} = 1(0.99803)(0.99798)(0.99791) \dots$$

$$tp_{20}^{(k)} = \frac{l_{x+t}^{(k)}}{l_x^{(k)}} = \frac{998,030.00}{1,000,000.00}$$





# Conmutados

Tasa de interés = 8% anual

$$1 - q_x^{(k)} \quad l_x^{(k)} * p_x^{(k)} \quad \frac{1}{(1+i)^x} \quad l_{x+t}^{(k)} * v^{x+t}$$

X	$q_x^{(k)}$	$p_x^{(k)}$	$l_x^{(k)}$	$v^x$	$D_x^{(k)}$
20	0.0019700	0.9980300	<b>1,000,000</b>	0.21455	214,548.21
21	0.0020200	0.9979800	998,030.00	0.19866	198,264.40
22	0.0020900	0.9979100	996,013.98	0.18394	183,207.32
23	0.0021500	0.9978500	993,932.31	0.17032	169,281.86
24	0.0022200	0.9977800	991,795.36	0.15770	156,405.47
25	0.0023000	0.9977000	989,593.57	0.14602	144,498.38

$$D_x^{(k)} = l_{x+t}^{(k)} * v^{x+t} = 1,000,000 (0.21455) = 214,548.21$$

Ejercicio: Determinar el valor presente actuarial de un pago de \$20,000 que se realizará a los 24 años de edad cumplidos, suponiendo un grupo de personas de 5 integrantes y todos cuentan con una edad actual de 21 años.

$$\$20,000 * \frac{D_{x+t}^{(k)}}{D_x^{(k)}} = \$20,000 * \frac{156,405.47}{214,548.21} =$$

**\$ 15,778.75**  
x 5

$$\$20,000 * \frac{l_{x+t}^{(k)}}{l_x^{(k)}} v^t = \$20,000 * \frac{991,795.36}{998,030} v^t =$$

$v^3 = 0.79383224$

**15,777.46**  
x 5



# Conmutados

Tasa de interés = 8% anual

$$1 - q_x^{(k)}$$

$$l_{x+t}^{(k)} * v^{x+t} \quad \sum_0^{\infty} D_{x+t}^{(k)}$$

X	$q_x^{(k)}$	$p_x^{(k)}$	$l_x^{(k)}$	$v^x$	$D_x^{(k)}$	$N_x^{(k)}$
20	0.0019700	0.9980300	<b>1,000,000</b>	0.21455	214,548.21	1,066,205.6
21	0.0020200	0.9979800	998,030.00	0.19866	198,264.40	851,657.4
22	0.0020900	0.9979100	996,013.98	0.18394	183,207.32	653,393.0
23	0.0021500	0.9978500	993,932.31	0.17032	169,281.86	470,185.7
24	0.0022200	0.9977800	991,795.36	0.15770	156,405.47	300,903.9
25	0.0023000	0.9977000	989,593.57	0.14602	144,498.38	144,498.4

$$N_x^{(k)} = \sum_0^{\infty} D_{x+t}^{(k)} = 214,54.21 + 198,264.40 + 183,207.32 + \dots$$

Chester Wallace Jordan p. 48

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{N_x}{D_x} + \frac{m-1}{2m}$$

Vencida pagadera m veces al año

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}$$

Anticipada pagadera m veces al año



# Conmutados

## Anualidades vitalicias

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x^{(k)}}{D_x^{(k)}} \quad a_x^{(m)} = \frac{N_x^{(k)}}{D_x^{(k)}} + \frac{m-1}{2m} \quad \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(k)}}{D_x^{(k)}} - \frac{m-1}{2m}$$

## Anualidades temporales

$$a_{x:n} = \frac{N_x^{(k)} - N_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}} \quad \ddot{a}_{x:n}^{(m)} = \frac{N_x^{(k)} - N_{x+n}^{(k)} - \frac{m-1}{2m} (D_x^{(k)} - D_{x+n}^{(k)})}{D_x^{(k)}}$$

## Anualidades diferidas

$$n/a_x = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}} \left( \frac{N_{x+n}^{(k)}}{D_{x+n}^{(k)}} \right) = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}} a_{x+n}$$

$$n/\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}} \left( \frac{N_{x+n}^{(k)}}{D_{x+n}^{(k)}} - \frac{m-1}{2m} \right) = \frac{D_{x+n}^{(k)}}{D_x^{(k)}} \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$n/\ddot{a}_{x:m}^{(m)} = \frac{N_{x+n}^{(k)} - N_{x+n+m}^{(k)} - \frac{m-1}{2m} (D_{x+n}^{(k)} - D_{x+n+m}^{(k)})}{D_x^{(k)}}$$



$$\frac{(-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16}$$

$$\theta(\csc \theta - \sin \theta) =$$

$$\cos^2 \theta.$$

$$\tan \theta - \sin^2 \theta.$$

$$\sec \theta - \sin^2 \theta.$$

$$\cot \theta - \sin^2 \theta.$$

$$\sin^2 \theta.$$

Which expression

- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.

## EJERCICIOS #1

# Ejercicio 5

## Datos:

Considerando un beneficio a la jubilación de \$250 por mes comenzando desde edad 55

Forma normal de pago: Anualidad vitalicia con 5 años de garantía

Tasa de interés: 6% anual

Solamente un participante con fecha de nacimiento de 1/1/71

## Valores conmutados seleccionados:

x	Nx
50	67,129
51	62,016
55	44,721
56	41,056
60	28,659
61	26,066

$$\ddot{a}_{5-6\%}^{(12)} = 4.348$$

¿En qué rango de valor está el valor presente del beneficio a la fecha de valuación 1/1/2021?

- A. Menos de \$25,750
- B. \$25,750 pero menor que \$26,000
- C. \$26,000 pero menor que \$26,250
- D. 26,250 pero menor de \$26,500
- E. \$26,500

# Ejercicio 6

## Datos:

Una empresa desea asegurar a su empleado para contar con un beneficio a la jubilación a la edad de su jubilación.

- Fecha de valuación 1/1/2018
- Considerando un beneficio a la jubilación de \$250 por mes comenzando desde edad 65
- Forma normal de pago: Anualidad vitalicia con 10 años de garantía
- Edad actual: 57 años

## Valores conmutados seleccionados:

x	Dx	Nx
57	194	2111
65	100	919
75	36	247

$$\ddot{a}_{10-\overline{1}}^{(12)} = 7.219$$

¿En qué rango de valor está la prima anual neta nivelada?

- A. Menos de 2,200
- B. \$2,200 pero menor que \$2,300
- C. \$2,300 pero menor que \$2,400
- D. 2,400 pero menor de \$2,500
- E. \$2,500 o más



# Ejercicio 7

## Datos:

Considerando los siguientes valores conmutados y una tasa de interés anual del 3%

X	Nx
88	208
89	153
90	110
91	77
92	53
93	35

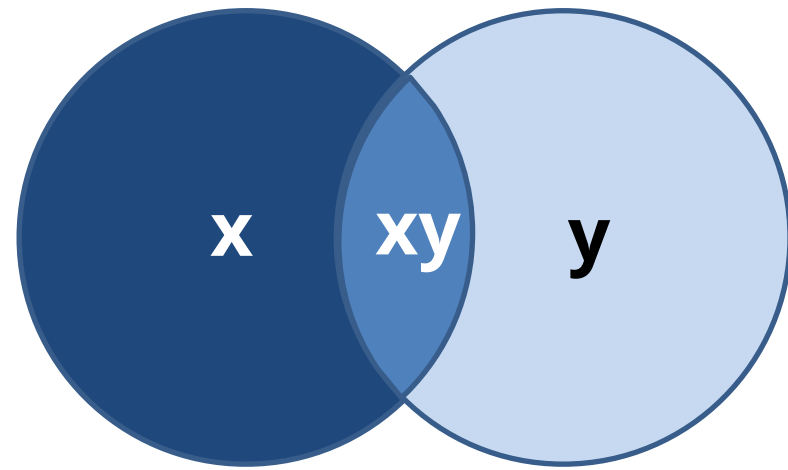
¿En qué rango de valor está  $3q_{89}$ ?

- A. Menos de 0.47
- B. 0.47 pero menor de 0.49
- C. 0.49 pero menor de 0.51
- D. 0.51 pero menor de 0.53
- E. 0.53 o más



# Decrementos Vidas conjuntas

- Vidas conjuntas (Joint life)
  - El estatus de sobrevivencia se mantiene mientras 2 personas sobrevivan.
  - Por lo tanto, este estatus termina a la primera muerte.



- La función de supervivencia en este caso es:

$$\text{» } t p_{xy} = t p_x * t p_y$$

- De aquí derivamos  $t q_{xy} = 1 - t p_{xy}$





Tasa de interés = 8% anual

# Conmutados vidas conjuntas

$$\frac{l_{x+t}^{(k)} * l_{y+t}^{(k)}}{1,000,000} \quad v^{(x+y)/2}$$

X	$q_x$	$q_y$	$p_x$	$p_y$	$l_x$	$l_y$	$l_{xy}$	$v_{xy}$	$D_{xy}$
20	0.0019700	0.0009300	0.9980300	0.9990700	<b>1,000,000</b>	1,000,000.00	1,000,000.00	0.21455	214,548.21
21	0.0020200	0.0009300	0.9979800	0.9990700	998,030.00	999,070.00	997,101.83	0.19866	198,080.01
22	0.0020900	0.0009400	0.9979100	0.9990600	996,013.98	998,140.86	994,162.25	0.18394	182,866.71
23	0.0021500	0.0009400	0.9978500	0.9990600	993,932.31	997,202.61	991,151.90	0.17032	168,808.32
24	0.0022200	0.0009500	0.9977800	0.9990500	991,795.36	996,265.24	988,091.24	0.15770	155,821.33
25	0.0023000	0.0009500	0.9977000	0.9990500	989,593.57	995,318.79	984,961.07	0.14602	143,821.95

$$N_{xy} = \sum_0^{\infty} D_{xy+t}^{(k)} \quad \ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}} - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} + \% \left( \ddot{a}_y^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)} \right)$$

# Ejercicio 8

## Datos:

- Fecha efectiva de la pensión de último sobreviviente: 1/1/2019
- Términos del pago: 1,000 pagadero al inicio de cada mes si ambas personas están con vida, y 750 pagadero al inicio de cada mes si alguna persona sigan con vida.

## Datos de los pensionados al 1/1/2019: Datos de los pensionados al 1/1/2019:

	Susana	Juan
Edad	60	65

## Extracto de los valores de las anualidades, anticipada pagadera 12 veces al año:

x	Susana	Juan
60	11.2993	10.5959
65	10.1047	9.3452

$$\ddot{a}_{60F:65M}^{(m)} = 8.1620$$

## ¿En qué rango de valor está el valor presente de la anualidad 1/1/2019?

- A. Menos de 131,000
- B. 131,000 pero menor de 135,000
- C. 135,000 pero menor de 139,000
- D. 139,000 pero menor de 143,000
- E. 143,000 o más



# Ejercicio 9

- Considerando la siguiente información demográfica al 1/1/2022:
  - Persona 1: 60 años
  - Persona 2: 65 años
- Teniendo las siguientes probabilidades:

x	y	$y-xp_x$
60	70	0.730
60	75	0.540
65	75	0.706
65	80	0.508
70	75	0.740
75	80	0.720

- ¿En qué rango está la probabilidad de que la Persona 1 y la Persona 2 sobrevivan 10 años, pero al menos una de ellas no sobreviva 15 años?
  - A. Menos de 0.23
  - B. Más de 0.23 pero menor que 0.28
  - C. Más de 0.28 pero menor que 0.33
  - D. Más de 0.33 pero menor de 0.38
  - E. 0.38 o más





**Act. Omar Sagahon Menchaca**  
SOCIO & DIRECTOR

 **55 7372 3830**

 **55 7576 4417**

 **omar.sagahon@osmconsultores.com**

**[www.osmconsultores.com](http://www.osmconsultores.com)**